КЛАСИКИ ПОПУЛЯРИЗАЦІЇ НАУКИ

Шарль П'єр Франсуа
Дюпен

ГЕОМЕТРІЯ МИСТЕЦТВ І РЕМЕСЕЛ

Переклад з французької,
передмова, біографічний нарис,
загальна редакція та примітки
В.О. Тадеєва

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

УДК 513.0
ББК 22.151.0
Д96

Серію "Класики популяризації науки" засновано 2007 року

Дюпен Шарль П'єр Франсуа
Д96 Геометрія мистецтв і ремесел / Переклад з французької, передмова, біографічний нарис, загальна редакція та примітки В.О. Тадеєва. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2010. — 336 с.

ISBN 978-966-10-1433-5

Книга написана майже 200 років тому відомим французьким математиком, інженером, економістом, громадським діячем та просвітителем Шарлем Дюпеном (1784–1873). Незважаючи на свій поважний вік, вона залишається цікавою і для сучасного читача як чудова збірка численних практичних застосувань геометрії та майстерний опис важливих ідей, що вплинули на розвиток геометрії у XIX – XX ст. Це тим більше цікаво, що багато із цих ідей належать самому автору.

Книга добре ілюстрована, тому її з цікавістю прочитають навіть ті, хто «не дружить» з геометрією через переобтяженість абстрактними поняттями і доведеннями. А вчитель знайде у ній велику кількість прикладів практичного застосування геометрії, які так потрібні йому для зацікавлення учнів своїм предметом.

У свій час книга видавалася багатьма європейськими мовами. Українською мовою друкується вперше.

Для учнів та вчителів математики загальноосвітніх навчальних закладів різних профілів, студентів та викладачів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів, а також для усіх, хто цікавиться точними науками та їхньою історією.

ББК 22.151.0

Охороняється законом про авторське право.
Жодна частина цього видання не може бути відтворена
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва

ISBN 978-966-408-435-9 (серія)
ISBN 978-966-10-1433-5
© Навчальна книга – Богдан, майнові права, 2010

Лекція четверта.

РІЗНІ ФОРМИ, ЯКИХ МОЖНА НАДАВАТИ ВИРОБАМ ІНДУСТРІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ І КРУГА

Серед плоских фігур, обмежених прямими лініями, є правильні і неправильні, прості і складені. Ми обмежимося вивченням тих, які у практиці застосовуються найчастіше.

Дві прямі лінії, паралельні чи непаралельні, не можуть повністю обмежувати певного місця. Для цього повинно бути принаймні три лінії, які не є паралельними.

Плоска поверхня, обмежена трьома прямими лініями, називається *прямолінійним трикутником*. У трикутнику *ABC* (рис. 4.1) розрізняють: три його *сторони* *AB*, *BC* і *CA*; три його *кути* і три *вершини* *A*, *B*, *C* цих трьох кутів.

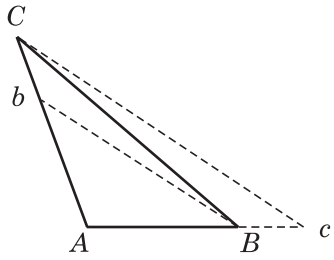

Рис. 4.1

Кути трикутника мають примітну і дуже важливу для практики властивість: їхня сума дорівнює двом прямим кутам, якою б не була величина і форма трикутника.

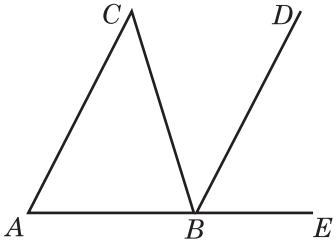

Рис. 4.2

Для доведення цього продовжимо сторону *AB* на *BE* і проведемо *BD*, паралельно *AC* (рис. 4.2). Оскільки дві паралельні *AC* і *BD* будуть перерізаними двома прямими *ABE* та *BC*, то матимемо: 1) кут *CAB* дорівнює куту *DBE*; 2) кут *ACB* дорівнює куту *CBD*. Таким чином, три кути *A*, *B*, *C* трикутника *ABC* будуть рівними трьом кутам *ABC*, *CBD*, *DBE*, які заповнюють весь проміжок з одного боку від прямої лінії *ABE*, тобто двом прямим кутам.

Звідси випливає, що як тільки визначимо два кути трикутника, то визначимо і третій; для цього достатньо одного додавання й одного віднімання.

Припустимо, наприклад, що ці два кути такі: один має 37°, інший — 49°. Д*одавши* 37° і 49°, матимемо 86 градусів, які *віднімаємо* від двох прямих кутів, тобто від 180°, і дістаємо 94°. Тому третій кут має 94°.

Оскільки сума трьох кутів трикутника дорівнює двом прямим кутам, то один із них мав би дорівнювати нулю, якби два інших були прямими. Отже, трикутник може мати тільки один прямий кут.

Тим більше, трикутник *ABC* (див. рис. 4.1) може мати тільки один *тупий* кут *A*, тобто більший від прямого; це — *тупокутний* трикутник.

Трикутник *ABC* (див. рис. 4.2) може мати усі три *гострі* кути; це — *гострокутний* трикутник.

Прямокутним є такий трикутник *ABC* (див. рис. 4.23), який має один прямий кут *B*. Найбільша сторона *AC*, яка лежить проти цього кута, називається *гіпотенузою*.

Тепер порівняємо між собою сторони трикутника. Оскільки пряма лінія є найкоротшим шляхом від однієї точки до іншої, то звідси випливає, що *у трикутнику кожна сторона є коротшою від суми двох інших сторін*.

Із двох сторін *AB* і *AC* трикутника *ABC* (див. рис. 4.1) більша сторона *AC* лежить проти більшого кута *B*.

Справді, відкладемо *Ab* = *AB* і *Ac* = *AC*, потім проведемо *Bb* та *Cc*; кути *ABb*, *AbB*, *ACc*, *AcC* будуть рівними. Крім цього, *ABC* більший від *ABb*, а *ACB* — менший від *ACc*. Отже, кут *ABC* більший від кута *ACB*.

Рівностороннім є такий трикутник *ABC* (рис. 4.3), у якому всі три його сторони рівні між собою.

Рівнобедреним є такий трикутник *ABC* (рис. 4.4), у якому дві сторони рівні між собою.

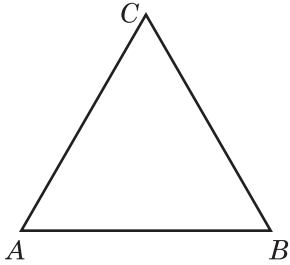

Рис. 4.3

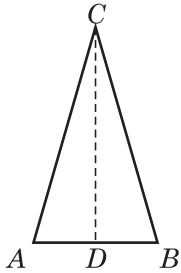

Рис. 4.4

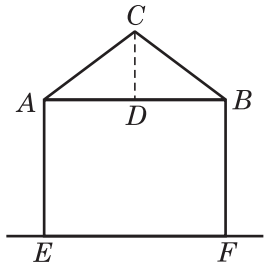

Рис. 4.5

Розглядаючи дві рівні сторони *CA* і *CB* як рівні похилі відносно *основи AB*, помітимо, що перпендикуляр *CD* падає на середину цієї основи і ділить трикутник на дві рівні частини[1].

Аби задовольняти закони симетрії, архітектори накривають більшу частину будинків і громадських будівель дахами, профіль яких є *рівнобедреним* трикутником. У давньогрецьких храмах та італійських будинках (рис. 4.5) цей трикутник є *тупокутним*, а дахи дзвіниць і давніх готичних споруд мають профіль *гострокутного* трикутника (рис. 4.6).

Для підйому вантажів часто застосовується пристосування, яке називається *козою*[2] (рис. 4.7). Воно складається із двох дерев'яних брусів рівної довжини, з'єднаних кінцями у *C* та розведених біля інших кінців перекладиною *AB*. Віръовка, яка служить для підняття вантажу *D*, проходить через блок,

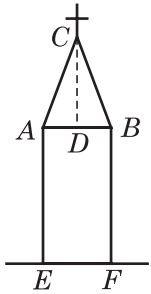

Рис. 4.6

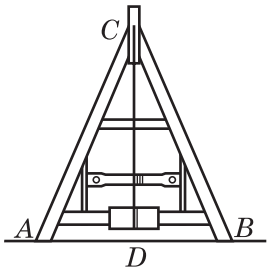

Рис. 4.7

---

[1] Французькою мовою рівнобедрений трикутник називається *симетричним* трикутником (*triangle symétrique*). У зв'язку з цим автор робить тут таке зауваження: «Симетричність цих частин виправдовує назву *симетричного*, дану трикутнику, що має дві рівні сторони». — *Прим. ред.*

[2] У нас поширена назва «козел». — *Прим. ред.*

закріплений у C. Трикутник ABC, форму якого має коза, є *рівнобедреним*, а тому перпендикуляр, проведений із C на основу AB, ділить цю основу на дві рівні частини.

У практиці часто виникає потреба виготовляти трикутник, знаючи певні його частини. Ось як для цього діють.

1. Якщо знаємо три сторони 1, 2 і 3 (рис. 4.8).

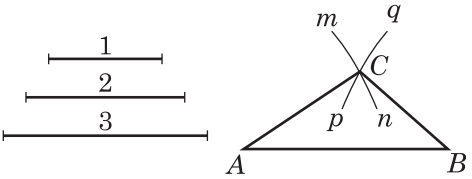

Рис. 4.8

Спочатку у тому місці, де потрібно побудувати трикутник, проводимо пряму лінію AB, рівну стороні 3. Потім з точки A, як із центра, розхилом циркуля, рівним стороні 2, описуємо дугу кола mCn, а з точки B, як із центра, розхилом циркуля, рівним стороні 1, описуємо дугу кола pCq. Через точку C, де перетинаються ці дві дуги, проводимо прямі лінії AC і BC. ABC — шуканий трикутник.

2. Якщо знаємо дві сторони 1 і 2 та кут a (рис. 4.9).

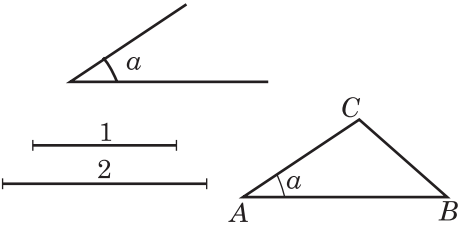

Рис. 4.9

Спочатку в підходящому місці проводимо пряму лінію AB, рівну стороні 2. Потім за допомогою інструмента, придатного для вимірювання кутів (транспортира, циркуля або якого-небудь іншого), проводимо лінію AC таким чином, щоб кут BAC був рівним куту a, і відкладаємо AC, що дорівнює стороні 1. Нарешті, проводимо пряму лінію BC, і в нас є шуканий трикутник.

3. Якщо знаємо лише одну сторону 1 і два кути a і b, вершини яких знаходяться при кінцях цієї сторони (рис. 4.10).

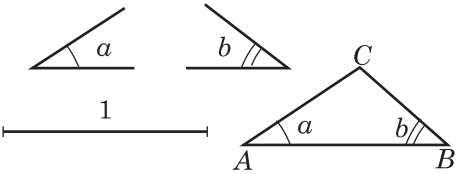

Рис. 4.10

Проводимо лінію AB, рівну стороні 1. Потім за допомогою приладу для перенесення кутів проводимо послідовно прямі лінії AC і BC, які утворюють з AB кути a і b. ABC — шуканий трикутник.

Усі ці операції дуже прості, але важливо, щоб викладачі часто нагадували їх учням з використанням лінійки та циркуля.

Щойно ми розібрали три способи побудови трикутника: 1) за трьома даними сторонами; 2) за двома даними сторонами і кутом між ними; 3) за двома заданими кутами і прилеглою до них стороною. У кожному випадку ми бачили, що цих даних достатньо.

Отже: 1) якщо два трикутники мають попарно рівні сторони, то вони є рівними — це є той самий трикутник, побудований з тих самих елементів у різних місцях;

2) якщо два трикутники мають по дві рівні сторони й рівні обмежені ними кути, то ці трикутники є рівними.

3) якщо два трикутники мають по два рівних кути й рівні спільні для них сторони, то ці трикутники є рівними.

Таким чином, два трикутники ABC та abc (рис. 4.11) є рівними між собою,

1) якщо AB рівна ab, BC рівна bc, AC рівна ac; 2) якщо AB рівна ab, BC рівна bc і якщо кут B рівний куту b; B, b — між сторонами AB і BC та ab і bc; 3) якщо AB рівна ab, кут A рівний куту a і кут B рівний куту b.

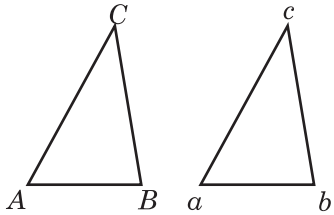

Рис. 4.11

Важливо, щоб практики постійно пам'ятали про ці три умови рівності, оскільки вони найчастіше застосовуються як у виробничій діяльності, так і в доведеннях геометрії та механіки.

Якщо одна із трьох умов, за якими два трикутники можуть бути рівними, не виконується у повному обсязі, то такі трикутники уже не можуть бути рівними, оскільки тоді для якоїсь зі сторін або для якогось із кутів одного трикутника не було б рівного в іншому. Для ведення практичних справ на науковій основі дуже важливо знати прості ознаки, умови, які є необхідними для кожної операції. Це дає змогу уникати багатьох помилок, а також служить засобом для безпосередньої перевірки.

Про фігури з чотирма сторонами, або чотиристоронники. Є фігури $ABCD$ (рис. 4.12), які повністю обмежені чотирма прямими лініями; вони мають *чотири кути* і *чотири вершини*

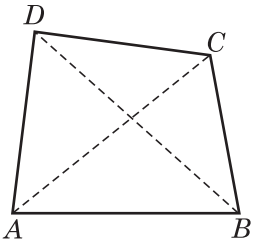

Рис. 4.12

A, *B*, *C*, *D*. Прямі лінії *AC* і *BD*, які сполучають протилежні вершини, називаються *діагоналями*.

У геометрії фігурам з чотирма сторонами дається загальна назва *чотиристоронників*[1], а їхні більше чи менше правильні форми вирізняють окремими назвами.

Трапецією ABCD (рис. 4.13) є фігура з чотирма сторонами, дві з яких *AB* і *CD* — паралельні.

Трапеція є *прямокутною* (рис. 4.14), коли третя сторона *BC* є перпендикулярною до двох паралельних сторін *AB* і *CD*.

Трапеція *ABCD* (рис. 4.15) є *рівнобедреною*[2], якщо обидві її непаралельні сторони *AD* і *BC* однаково нахилені до двох інших.

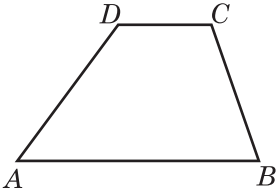

Рис. 4.13

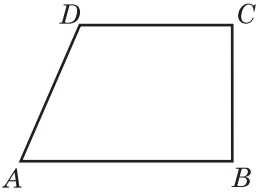

Рис. 4.14

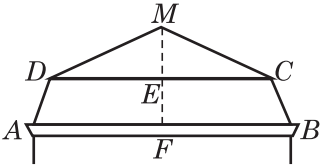

Рис. 4.15

У деяких правильних будівлях дах складається з рівнобедреного трикутника *MDC* (див. рис. 4.15) у верхній частині і рівнобедреної трапеції *ABCD* у нижній частині; це називається *мансардою*, від імені архітектора Мансарда[3], який запропонував такий вид покрівлі. Вертикаль *MEF* є лінією симетрії для трикутника і для трапеції.

Паралелограм (рис. 4.16) — це фігура, чотири сторони якої попарно паралельні.

Застосування. Паралелограм постійно використовується у практиці; він часто знаходить застосування при побудові механізмів; він служить

---

[1] За українською термінологією, в елементарній геометрії замість терміна «чотиристороннник» застосовується термін «чотирикутник». Термін «чотиристоронник» застосовується у проективній геометрії, де йому протистоїть «чотиривершинник» — фігура, що складається з чотирьох точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. У сучасній французькій математичній термінології теж розрізняються чотиристоронники (*quadrilatères*) і чотирикутники (quadrangles або tétragones). — *Прим. ред.*

[2] За французькою термінологією, рівнобедрені трапеції називаються *симетричними*. — *Прим. ред.*

[3] **Мансард**, або Мансар (Mansard) Франсуа (1598–1666) — відомий французький архітектор епохи класицизму. — *Прим. ред.*

для реалізації того, що називається *паралельним переміщенням*, і т. д.

За властивістю паралелей, яку ми довели у другій лекції, протилежні кути A і C паралелограма з одного боку, а також D і B з іншого, — рівні між собою; два з них гострі, а два — тупі. Крім цього, якщо до тупого кута додамо гострий, то сума дорівнюватиме двом прямим кутам.

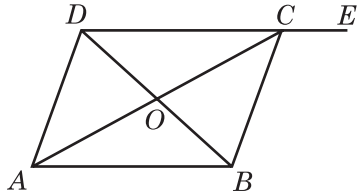

Рис. 4.16

Справді, якщо ми продовжимо на CE сторону DC (див. рис. 4.16), то, внаслідок паралельності прямих AD і BC, кут ADC буде рівним куту BCE, а DCB плюс кут BCE дорівнюють двом прямим кутам.

Оскільки ми довели (у другій лекції), що паралелі, які розміщені між паралелями, є рівними, то звідси випливає, що протилежні сторони паралелограма рівні між собою. Таким чином, AB дорівнює CD, а AD дорівнює BC.

Точка O зустрічі обох діагоналей лежить посередині кожної з них.

Справді, якщо AOC і DOB — діагоналі, то трикутники ABO і CDO рівні між собою, — оскільки: 1) $AB = CD$; 2) кут $ODC = OBA$; 3) кут $OCD = OAB$, за властивістю паралельних. Отже, $OB = OD$, а $OA = OC$.

Із двох діагоналей AC і DB (рис. 4.17) *більша AC лежить проти більших кутів B і D.*

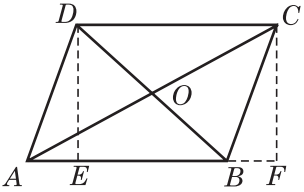

Рис. 4.17

Справді, якщо ми проведемо лінії DE і CF, перпендикулярні до сторін AB і CD, то ці лінії будуть рівними. При цьому BE менша за AF, тому похила BD є коротшою, ніж похила AC.

Ромбом називається паралелограм $ABCD$ (рис. 4.18), у якому чотири сторони є рівними. Ця фігура, внаслідок своєї правильності, має привабливий вигляд і тому часто застосовується в мистецтві орнаментування.

Якщо дві суміжні сторони паралелограма є під прямим кутом, то й інші так само.

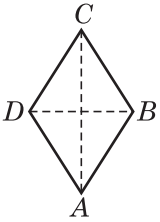

Рис. 4.18

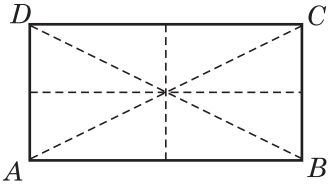

Рис. 4.19

Справді, якщо кут A (рис. 4.19), наприклад, — прямий у паралелограмі $ABCD$, то сторона AD є перпендикулярною до AB. Те саме буде і для BC відносно AB. А якщо кути A і B — прямі, той рівні їм кути C і D теж є прямими.

Такою є фігура, яку називають *прямокутним паралелограмом*, або просто *прямокутником*, для скорочення. У цій фігурі обидві діагоналі AC і BD є рівними.

Для доведення цього достатньо помітити, що два прямокутних трикутники ADC, DAB є рівними. Справді: 1) прямий кут D рівний прямому куту A; 2) сторона AD є спільною для обох трикутників, отже, рівна для них обох; 3) сторона DC кута D першого трикутника рівна стороні AB кута A другого. Тому третя сторона AC трикутника ADC рівна третій стороні BD трикутника DAB. Тим часом, AC і BD — обидві діагоналі.

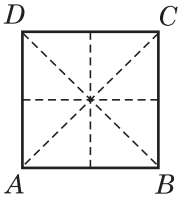

Рис. 4.20

Квадрат ABCD (рис. 4.20) має чотири рівні сторони і чотири рівних кути.

Якщо ми резюмуємо властивості фігур з чотирма сторонами, то матимемо такий перелік, *який молоді майстри повинні закарбувати у своїй пам'яті*.

У квадраті чотири кути рівні і прямі, чотири сторони рівні між собою і обидві діагоналі рівні між собою.

У прямокутнику чотири кути рівні і прямі; є дві довгі сторони, які рівні між собою; дві менші сторони рівні між собою; обидві діагоналі рівні між собою.

У ромбі чотири сторони рівні між собою; два тупих кути рівні між собою; два гострих кути рівні між собою; нарешті, діагоналі — не рівні.

У паралелограмі є дві великі рівні сторони і два великих рівних кути, а також дві малі рівні сторони і два малих рівних кути. Діагоналі не є рівними, велика лежить проти великих кутів, а мала — проти малих.

Симетрія фігур з чотирма сторонами. Перегинаючи одну частину цих фігур на іншу частину, яка їй рівна, доведемо, що: 1) *трапеція* з рівними похилими сторонами (див. рис. 4.15) симетрична відносно лінії EF, яка проходить через середини обох її основ; 2) *прямокутник* (див. рис. 4.19) симетричний відносно кожної прямої лінії, проведе-

ної через середини двох протилежних сторін; 3) *ромб* (див. рис. 4.18) симетричний відносно кожної зі своїх діагоналей; 4) *квадрат* (див. рис. 4.20) симетричний відносно обох діагоналей, а також відносно кожної прямої лінії, яка проходить через середини його протилежних сторін. Ця симетрія чотиристоронніх фігур має найбільше значення для мистецтв і для механіки.

Ми знаємо, що *у будь-якому трикутнику сума кутів дорівнює двом прямим кутам.*

Але кожна фігура *ABCD* з чотирма сторонами (див. рис. 4.12) може розкластися на два трикутники *ABC* і *ACD*, для кожного з яких сума трьох кутів дорівнює двом прямим кутам. Крім цього, шість кутів цих трикутників мають своєю сумою чотири кути фігури *ABCD*. Отже,

у фігурі з чотирма сторонами сума кутів дорівнює двічі по два, або чотирьом, прямим кутам.

Якби мали фігуру *ABCDE* з п'ятьма сторонами (рис. 4.21), то могли б з вершини *A* провести дві прямі лінії *AC*, *AD* до вершин *C*, *D*; це поділило б фігуру на три трикутники, дев'ять кутів яких, узяті разом, дорівнюють п'ятьом кутам фігури *ABCDE*.

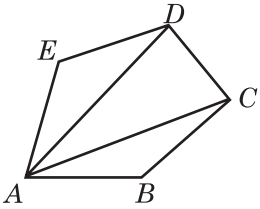

Рис. 4.21

Таким чином, *у фігурі з п'ятьма сторонами сума кутів дорівнює тричі по два прямих кути, або шість прямих кутів.*

Застосовуючи цей самий метод, побачимо, що сума кутів для фігур, які мають 3, 4, 5, 6, 7, 8 і т.д. сторін, дорівнює відповідно 2, 4, 6, 8, 10, 12 і т.д. прямих кутів.

Відношення круга до фігур, обмежених прямими лініями. Через три вершини трикутника *ABC* (рис. 4.22) завжди можна провести коло, і ось яким чином. Із середини *AB* проводимо *mo* перпендикулярно до *AB*, а із середини *BC* проводимо *no* перпендикулярно до *BC*. Точка *o*, де ці перпендикуляри зустрічаються, є рівновіддаленою від трьох вершин *A*, *B* і *C*. Отже, ця точка є центром кола, що проходить через ці три точки.

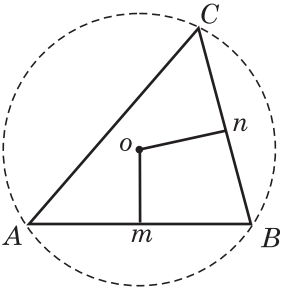

Рис. 4.22

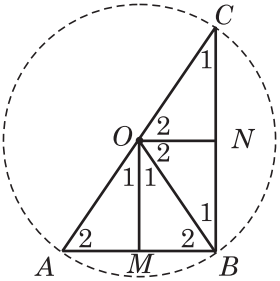

Рис. 4.23

Трикутник, вершини якого розміщені на колі круга, називається *вписаним* у круг.

Коли трикутник *ABC* є *прямокутним* (рис. 4.23), тобто має прямий кут *B*, то центр *O* кола, що проходить через три його вершини, знаходиться посередині сторони *AC*, що лежить проти прямого кута, тобто сторони, яку ми назвали *гіпотенузою*.

Ось найпростіший шлях для доведення цього твердження.

У прямокутнику *ABCD* (рис. 4.24) обидві діагоналі є рівними і внаслідок цього рівними є також їхні половини *OA*, *OB*, *OC*, *OD*, які можна взяти за радіуси круга. Отже, *у круг завжди можна вписати прямокутник*, *а тому і квадрат* (рис. 4.25).

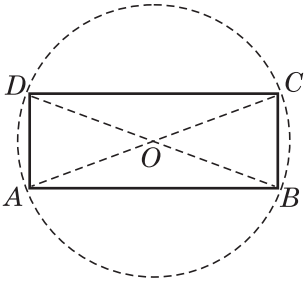

Рис. 4.24

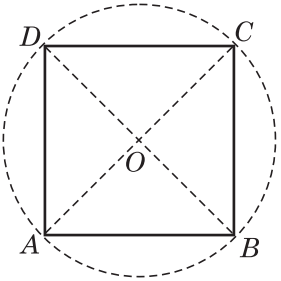

Рис. 4.25

Якщо для заданого прямокутного трикутника *ABC* (див. рис. 4.24) побудувати рівний йому *ADC*, то утвориться прямокутник, який є вписаним у круг, що має центр посередині *AC*. Отже, коло, яке проходить через три вершини *A*, *B* і *C* трикутника *ABC* з прямим кутом в *B*, має своїм діаметром найбільшу сторону *AC* трикутника[1)].

[1)] Подамо доведення, яке не залежить від розгляду прямокутників. Проведемо через середину *AB* (див. рис. 4.23) пряму *MO*, перпендикулярну до *AB*, а через середину *N* лінії *BC* — перпендикуляр *NO* до *BC*; точка зустрічі *O* є вершиною двох рівних трикутників *AMO* та *BMO*, у яких позначимо через 1 і 2 відповідні гострі кути. Таким чином, кути 1 і 2 дають у сумі *прямий кут*. Але у великому трикутнику кути *A* і *C* теж дають у сумі прямий кут. Отже, кути, позначені через 1, 1, 1, 1, усі є рівними; так само є рівними кути, позначені через 2, 2, 2, 2. Зауважуємо, що чотири кути 1, 1, 2, 2 довко-

Звідси випливає, що будь-яку фігуру *ABCD* з чотирма сторонами, в якій протилежні кути *B* і *D* є прямими (рис. 4.26), можна вписати у круг, який проходить через чотири вершини фігури.

Справді, діагональ *AC* розбиває цю фігуру на два прямокутних трикутники, кожен з яких є вписаним у круг, що має *AC* своїм діаметром.

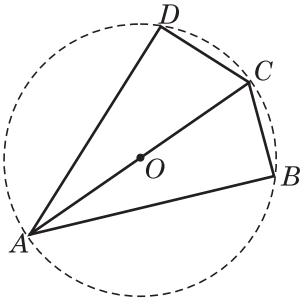

Рис. 4.26

Фігури, в яких є більше чотирьох сторін, дістали грецькі назви, які вказують на кількість їхніх сторін і кутів. Таким чином, пентагон, гексагон, гептагон, октагон тощо мають відповідно 5, 6, 7, 8, … сторін[1].

Серед цих фігур, які загалом називаємо *багатокутниками* (тобто фігурами з багатьма кутами), на особливу увагу заслуговують *правильні багатокутники*; їхні застосування дуже часті й важливі для виробництва.

Правильні багатокутники мають усі рівні сторони й усі рівні кути.

Відповідно до цього означення, якщо знайдеться точка *O*, яка однаково віддалена від трьох вершин *A*, *B*, *C* правильного багатокутника *ABCDEF*… (рис. 4.27), то я скажу, що вона так само віддалена і від усіх інших його вершин: таким чином, $OA = OB = OC = OD = \ldots$.

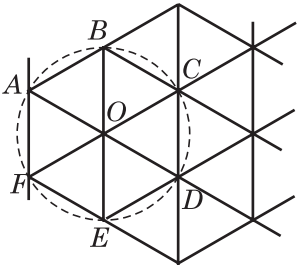

Рис. 4.27

Справді, рівнобедрені трикутники *AOB* і *BOC*, які мають рівні основи *AB*, *BC* та рівні бічні сторони *OA*, *OB*, *OC*, є рівними між собою. Їхні кути при основах дорівнюють по $\frac{1}{2}B$, оскільки два з них, узяті разом, утворюють кут *B*. Трикутник *OCD* рівний *OCB*, оскільки *OC* — спільна, $CD = BC$ як сторони правильного багатокутника, а кут $OCD = OCB$, оскільки один із цих

ла точки *O* дорівнюють 1 плюс 2 та 1 плюс 2, тобто двічі взятому прямому куту. Отже, *AO* і *OC* лежать на прямій лінії. Тому точка *O*, яка є рівновіддаленою від *A*, *B* і *C*, лежить на гіпотенузі *AC*. — *Прим. авт.*

[1] В українській науковій термінології такі назви застосовуються здебільшого у хімії та кристалографії. Натомість у математиці кажемо: *п'ятикутник*, *шестикутник* і т.д. — *Прим. ред.*