О.М. Афанасьєва
Я.С. Бродський
О.Л. Павлов
А.К. Сліпенко

МАТЕМАТИКА

10 клас

Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів
Рівень стандарту

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН
2011

ББК 22.1я72
А94

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено.

Наукову експертизу проводив Інститут математики НАН України.
Психолого-педагогічну експертизу проводив Інститут педагогіки НАПН України.

Експерти:

Вдовенко В.В. доцент, кандидат педагогічних наук Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка

Дорошенко Т.М. учитель Смілянської загальноосвітньої школи І-ІІІ ст. №7 Черкаської обл.

Калашник О.А. завідувач методичного кабінету відділу освіти Добровеличівської районної державної адміністрації Кіровоградської обл.

Каліберда К.В. методист методичного кабінету відділу освіти Іванівської райдержадміністрації Херсонської обл.

Читаєва О.В. учитель-методист Луганської спеціалізованої школи №57

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України №177 від 03.03.2010 р.)

Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К.
А94 Математика. 10 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. — 480 с.

ISBN 978-966-10-1272-0

Пропонований підручник відповідає програмі з математики для 10-го класу рівня стандарту й передбачає готовність учнів до широкого і свідомого застосування математики. Цю орієнтацію забезпечують зміст курсу, характер викладення навчального матеріалу, добір ілюстрацій і приклади застосувань, система вправ і контрольних запитань.

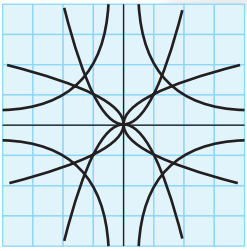
Для учнів і вчителів загальноосвітніх навчальних закладів.

ББК 22.1я72

Охороняється законом про авторське право.
Жодна частина цього видання не може бути відтворена
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва

© Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К., 2010
© Навчальна книга – Богдан, макет, художнє оформлення, 2011

ISBN 978-966-10-1272-0



! Звернення до читача

Дорогий юний друже!

Перед Вами підручник з предмета «Математика». Його головне призначення — допомогти Вам систематизувати, розширити й поглибити знання і вміння, які необхідні для математичного моделювання і дослідження процесів і явищ за допомогою функцій, рівнянь та інших математичних об'єктів, опанувати суміжними предметами (фізика, хімія, біологія тощо). І тим самим упевнитись у могутності математичних методів для пізнання навколишнього світу, у розв'язанні різних проблем.

Підручник для 10 класу складається з чотирьох розділів. Кожному розділу передує матеріал, що вивчався раніше і необхідний для вивчення цього розділу. Його подано у вигляді таблиць. Для забезпечення готовності до вивчення матеріалу розділу наводиться діагностичний тест.

Розділи підручника поділено на параграфи, які, в свою чергу, розчленовані на пункти. До кожного пункту подано контрольні запитання, що мають забезпечити активне засвоєння основних понять і фактів у їхньому взаємозв'язку.

Викладення навчального матеріалу у кожному пункті структуроване за рівнями. На першому рівні (його позначено літерою **Б**) викладаються найголовніші поняття, основні факти теми, хоча, найчастіше, без формальних доведень. Цей матеріал є базою для подальшого вивчення теми, більш ґрунтовного і повного.

На другому рівні (його позначено літерою **О**) наводиться більш повне обґрунтування попереднього матеріалу, його розширення, наводяться приклади його застосування. Матеріал на цих двох рівнях повністю забезпечує оволодіння предметом згідно з вимогами програми на рівні стандарту.

Виклад теоретичного матеріалу супроводжується розв'язанням типових задач відповідного рівня. Початок і кінець доведень тверджень та розв'язань прикладів позначено знаками □ і ■.

Система задач, вправ і контрольних запитань, наведених у підручнику, має три рівні складності: перший рівень складності позначено символом «°», другий не має позначень, третій позначено символом «*».

До загальної системи задач включено вправи на повторення, що мають сприяти готовності опанування наступним матеріалом, збереженню вмінь і навичок, сформованих при вивченні попередніх розділів.

Кожний розділ завершується матеріалом для підготовки до тематичного оцінювання, який складається із запитань для самоконтролю (з відповідями) та зразка тематичної контрольної роботи. Для повторення і систематизації навчального матеріалу розділу наведено відповідні таблиці.

Підручник містить вказівки і відповіді до задач, а також предметний покажчик.

Читання книги не є легкою справою. Деякі фрагменти доведень залишені для самостійного опрацювання. Не минайте їх!

Щиро бажаємо успіхів!

Колектив авторів

Позначення для орієнтування в навчальному матеріалі

Б, О — дві сходинки засвоєння навчального матеріалу

! — зверніть увагу

□ — початок розв'язання задачі, доведення теореми

■ — кінець розв'язання задачі, доведення теореми

° — задачі першого рівня складності

* — задачі третього рівня складності

✓ — контрольні запитання

✍ — графічні вправи; задачі

— вправи для повторення

? — завдання для самоконтролю

— тест для діагностики

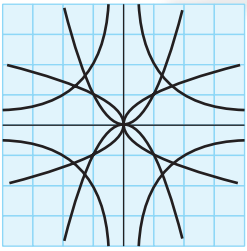
— межі для різних типів задач

∃ — існує об'єкт

∃! — існує єдиний об'єкт

⇒ — знак логічного слідування: якщо ..., то

⇔ — рівносильність: тоді і тільки тоді



§16. Тригонометричні формули додавання та наслідки з них

У даному параграфі розглянемо велику групу формул, пов'язаних з тим, що поворот на кут $\alpha+\beta$ можна реалізувати в результаті двох послідовних поворотів — на кут α і на кут β, та їхні застосування.

1. Формули додавання

Формули зведення дозволяють вважати, що кути α і β належать проміжку $[0; \pi]$. Розглянемо на тригонометричному колі точки P_α і P_β, маючи на увазі, що вектори $\overrightarrow{OP_\alpha}$ і $\overrightarrow{OP_\beta}$ утворюють кути α і β з віссю абсцис. Кут між векторами $\overrightarrow{OP_\alpha}$ і $\overrightarrow{OP_\beta}$ може дорівнювати $\alpha-\beta$, якщо $\alpha \geq \beta$ (рис. 339), $\beta-\alpha$, якщо $\beta > \alpha$ (рис. 340). У будь-якому з цих випадків косинус цього кута дорівнює $\cos(\alpha-\beta)$.

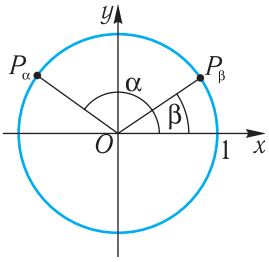


Рис. 339

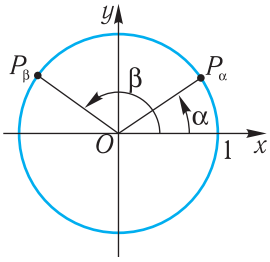


Рис. 340

Точки P_α і P_β мають відповідно координати $(\cos\alpha; \sin\alpha)$ і $(\cos\beta; \sin\beta)$. Такі самі координати мають і вектори $\overrightarrow{OP_\alpha}$ і $\overrightarrow{OP_\beta}$. За означенням скалярного добутку, $\overrightarrow{OP_\alpha} \cdot \overrightarrow{OP_\beta} = \left|\overrightarrow{OP_\alpha}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OP_\beta}\right| \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha-\beta)$, оскільки $\left|\overrightarrow{OP_\alpha}\right| = \left|\overrightarrow{OP_\beta}\right| = 1$.

Оскільки скалярний добуток векторів $\vec{a}=(x_1;y_1)$ і $\vec{b}=(x_2;y_2)$ виражається через їхні координати за формулою: $\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$, то маємо:

$$\overrightarrow{OP_\alpha}\cdot\overrightarrow{OP_\beta}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Порівнявши одержані результати, матимемо:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Косинус різниці двох кутів дорівнює сумі добутків косинусів та синусів цих кутів.

Як наслідок, отримуємо формулу косинуса суми кутів:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta).$$

З урахуванням парності косинуса і непарності синуса, одержимо:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Косинус суми двох кутів дорівнює різниці добутків косинусів та синусів цих кутів.

Виведемо тепер формули синуса суми двох кутів. Скориставшись формулами зведення і косинуса різниці двох кутів, матимемо:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Отже,

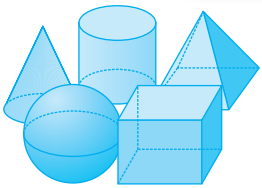
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Синус суми двох кутів дорівнює добутку синуса першого кута на косинус другого плюс добуток косинуса першого кута на синус другого.

Для синуса різниці маємо:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$

$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$



Предметний покажчик

Аксіоми стереометрії 131
Амплітуда гармонічного коливання 287
Арифметичний квадратний корінь 15
– корінь n-го степеня 85
Арккосинус 325
Арккотангенс 332
Арксинус 320
Арктангенс 330
Асимптота вертикальна 77

Бічна грань піраміди 134

Вершина паралелепіпеда 134
– піраміди 134
– тетраедра 134
Відсоток 36
Відстань між фігурами 426

Гармонічні коливання 286
Гіпербола 55
Головна властивість кореня 91
Грань двогранного кута 446
– многогранника 133
– паралелепіпеда 134
– тетраедра 134
Графік гармонічного коливання 287
– косинуса 275
– котангенса 282
– синуса 275
– тангенса 281
– функції 53
Графічний спосіб задання функції 47

Двогранний кут 446
Дроби нескінченні десяткові 19
– періодичні 19

Еліпс 167

Значення функції в точці 46
Зображення фігури 180

Квадратична функція 46
Квадратний корінь 85
Координатна пряма 23
Корінь n-го степеня 85
Косинус 241
Котангенс 241
Кругова частота гармонічного коливання 287
Куб 133
Кубічний корінь 86
Куля 135
Кути з однаково напрямленими сторонами 445
Кут між площинами 441
– – прямими 438
– – прямою і площиною 438
Кут обертання 228
Кутовий коефіцієнт прямої 53

Лінійна функція 46
Лінійний кут двогранного кута 447
Лінія котангенса 244
– тангенса 244

Математична модель 8
Мимобіжні прямі146
Множина значень функції 46
Модуль числа25

Напрям проектування 161

Обернена пропорційність 46
Область визначення функції 46
Окіл точки 26

Округлення чисел 33
Ортогональне проектування 406
Основа перпендикуляра 414
Основна властивість дійсних чисел 24
– тригонометрична тотожність 251
Осьова симетрія 369

Парабола 54
Паралелепіпед 134
– прямокутний134
Паралельна проекція точки на площину 161
– – фігури на площину162
Паралельне перенесення графіка функції 57
Паралельне проектування 161
Паралельні площини 206
– пряма і площина 194
– прямі 146
Переріз 139
Перетворення графіків функцій 57
Період функції 266
– – основний 270
Перпендикуляр до площини 363
Перпендикулярність площин 393
– прямих 362
– прямої і площини 363
Піраміда 134
– n-кутна 135
– правильна 135
Площина проекцій 161
– січна 139
Поворот навколо прямої 366
Показник кореня 89
Похила до площини 414
Початкова фаза гармонічного коливання 287
Природна область визначення функції 46
Проектуючі площини 162
– прямі 161
Проекція похилої 414

Радіан 229
Ребро двогранного кута 446
– многогранника 133
– паралелепіпеда 134
– піраміди 134
– тетраедра 134

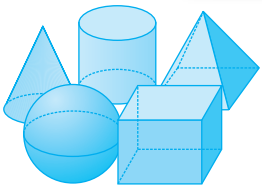
Рівняння однорідне тригонометричне 334
Розтяг графіка функції 59

Симетрія відносно площини 409
– осьова 369
– просторової фігури 409
Синус 241
Синусоїда 275
Слід площини 191
Степінь з натуральним показником 15
– – раціональним показником 97
– – цілим від'ємним показником 15
Стиск графіка функції 59
Суміжні грані паралелепіпеда 134

Табличний спосіб задання функції 49
Тангенс 241
Тангенсоїда 281
Теорема косинусів 224
– синусів 224
Тетраедр 134
– правильний 134
Точка розриву функції 75
Тригонометричне коло 234

Формули додавання 298
– зведення 256
– подвійного кута 302
– половинного аргументу 303
– універсальної підстановки 305
Функціональна залежність 45
Функція 45
– зростаюча 67
– квадратична 46
– лінійна 46
– монотонна 67
– непарна 71
– неперервна 74
– парна 71
– періодична 266
– спадна 66
– степенева 82
– тригонометрична 241

Числа дійсні 23
– ірраціональні 22
– натуральні 18
– раціональні 19
– цілі 18



Зміст

Звернення до читача 3
Вступ 5

РОЗДІЛ 1. Функції, їхні властивості та графіки 11
§1. Числові множини 18
§2. Обчислення і розрахунки 31
§3. Функціональні залежності 45
§4. Основні властивості функцій 66
§5. Корені n-го степеня 82
§6. Степеневі функції з раціональними показниками 97

РОЗДІЛ 2. Паралельність прямих і площин 117
§ 7. Основні поняття й аксіоми стереометрії 127
§8. Взаємне розміщення двох прямих у просторі 145
§9. Паралельне проектування 160
§10. Зображення фігур у стереометрії 179
§11. Паралельність прямих і площин 193
§12. Паралельність площин 205

РОЗДІЛ 3. Тригонометричні функції 221
§13. Тригонометричні функції числового аргументу 227
§14. Основні співвідношення між тригонометричними функціями 251
§15. Властивості і графіки тригонометричних функцій 266
§16. Тригонометричні формули додавання та наслідки з них 298
§17. Найпростіші тригонометричні рівняння і нерівності 317

РОЗДІЛ 4. Перпендикулярність прямих і площин 357
§18. Перпендикулярність прямої і площини 362
§19. Зв'язок між паралельністю і перпендикулярністю прямих і площин 378
§20. Перпендикулярність площин 392
§21. Ортогональне проектування 406
§22. Перпендикуляр і похила 414
§23. Вимірювання відстаней у просторі 425
§24. Вимірювання кутів у просторі 437
Відповіді і вказівки до задач 460
Предметний покажчик 477

КНИГА ПОШТОЮ
"НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН"
А/С 529
м. Тернопіль, 46008
☎ (0352) 287489
511141, 0673501870
mail@bohdan-books.com
ЗАМОВЛЯЙТЕ
КНИГИ ПОШТОЮ

Навчальне видання

АФАНАСЬЄВА Ольга Миколаївна
БРОДСЬКИЙ Яків Соломонович
ПАВЛОВ Олександр Леонідович
СЛІПЕНКО Анатолій Костянтинович

МАТЕМАТИКА
Підручник для 10 класу
загальноосвітніх навчальних закладів
Рівень стандарту

Головний редактор *Богдан Будний*
Редактор *Володимир Дячун*
Художник обкладинки *Володимир Басалига*
Дизайн та комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 29.06.2011. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Шкільна. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 27,80. Умовн. фарбо-відб. 55,60.
Наклад 10 000 прим.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК №370 від 21.03.2001 р.
Навчальна книга – Богдан, а/с 529, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46008
тел./факс (0352) 52-19-66; 52-06-07; 52-05-48
E-mail: publishing@budny.te.ua, office@bohdan-books.com
www.bohdan-books.com

ISBN 978-966-10-1272-0

9 789661 012720

Надруковано на ПРАТ «Львівська книжкова фабрика "Атлас"»
корпоративне підприємство ДАК «Укрвидавполіграфія»
79005, м. Львів, вул. Зелена, 20