БІБЛІОТЕЧКА ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ

**Я.С. Бродський, А.К. Сліпенко**

# ПОХІДНА ТА ІНТЕГРАЛ У НЕРІВНОСТЯХ, РІВНЯННЯХ, ТОТОЖНОСТЯХ

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

ББК 22.1я72
Б88

*Серію «Бібліотечка фізико-математичної школи» засновано 2010 року*

**Бродський Я.С., Сліпенко А.К.**
Б88 Похідна та інтеграл у нерівностях, рівняннях, тотожностях. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. — 120 с.

**ISBN 978-966-10-2520-1**

У книзі систематизовані методи розв'язання елементарних задач за допомогою математичного аналізу. Розглянуто низку нових задач, які розв'язуються шляхом застосування понять границі, похідної, інтеграла. Значну частину матеріалу викладено за допомогою розв'язання конкретних прикладів. Книга містить вправи для самостійної роботи.

Для вчителів та учнів загальноосвітніх шкіл та профільних класів природничого та фізико-математичного спрямування.

ББК 22.1я72



ISBN 978-966-10-0742-9 (серія)
ISBN 978-966-10-2520-1

# Передмова

Елементи математичного аналізу займають значне місце у шкільному курсі математики. Учні опановують математичний апарат, який може ефективно застосовуватись під час розв'язання задач математики, фізики, техніки. Мова похідної та інтеграла дає змогу строго формулювати багато законів природи. У курсі математики за допомогою диференціального та інтегрального числень досліджуються властивості функцій, будуються їхні графіки, розв'язуються задачі на найбільше і найменше значення, обчислюються площі і об'єми геометричних фігур. Інакше кажучи, введення нового математичного апарату дозволяє розглянути низку задач, які не можна розв'язати елементарними методами. Однак можливості методів математичного аналізу такими задачами не вичерпуються.

Багато традиційних елементарних задач (доведення нерівностей, тотожностей, дослідження і розв'язання рівнянь тощо) ефективно розв'язуються за допомогою похідної та інтеграла. Шкільні підручники і навчальні посібники мало приділяють уваги цим питанням. Разом з тим нестандартне застосування елементів математичного аналізу дає змогу глибше засвоїти основні поняття теорії, що вивчається. Тут доводиться підбирати метод розв'язання задачі, перевіряти умови його застосовності, аналізувати отримані результати. Фактично часто доводиться проводити невелике математичне дослідження, в процесі якого розвивається логічне мислення, математичні здібності, підвищується математична культура.

Багато задач елементарної математики можна розв'язати як «елементарними», так і «неелементарними» методами. Застосування похідної та інтеграла приводять, як правило, до більш ефективного розв'язання. З'являється можливість оцінити силу, красу, загальність нового математичного апарату.

Відмітимо ще, що методи математичного аналізу застосовуються не тільки для розв'язання поставлених задач, але є й джерелом одержання нових фактів елементарної математики.

Для користування книгою достатньо володіти профільним рівнем шкільного курсу математики. Більш того, ті факти і твердження, які застосовуються при розв'язуванні задач, наводяться у відповідному місці. Це стосується і тих небагатьох відомостей, які виходять за межі шкільного курсу.

Автори намагались, щоб усі розділи і багато параграфів були незалежними один від одного при їхньому вивченні. Це розширює можливості використання книги різними групами читачів.

Багато задач, які пропонуються в книзі, взято із вітчизняних і закордонних журналів для учнів і викладачів. Найскладніші, на думку авторів, параграфи, задачі і вправи відмічені зірочкою. При першому читанні їх можна пропустити. Початок і кінець розв'язання задачі позначені відповідно знаками □ і ■.

Як правило, означення набрано напівжирним шрифтом, курсивом, а твердження — прямим напівжирним шрифтом.

Дане видання є перекладом книги [14] українською мовою з деякими доповненнями, змінами та уточненнями.

# §11. Монотонність інтеграла

Із означення інтеграла випливає, що для невід'ємної неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $f$

$$\int_a^x f(t)dt \geq 0$$

для всіх $x \in [a; b]$. Як наслідок цього твердження одержуємо наступну теорему.

**Теорема 1.** **Нехай функції $f$ і $g$ неперервні на відрізку $[a; b]$ і для всіх $x \in [a; b]$ справджується нерівність $f(x) \geq g(x)$. Тоді для всіх $x$ із відрізка $[a; b]$**

$$\int_a^x f(t)dt \geq \int_a^x g(t)dt .$$

Цю властивість іноді називають монотонністю інтеграла.

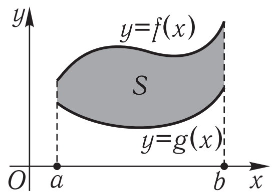

**Рис. 30**

Теорему 1 ілюструє рис. 30. Площа криволінійної трапеції під графіком функції $g$ складає у цьому випадку частину площі під графіком функції $f$. Теорема справджується і для функцій, які набувають від'ємних значень. Наведемо її доведення.

☐ Оскільки $f(x) - g(x) \geq 0$ для всіх $x \in [a; b]$, то

$$\int_a^x \big(f(t) - g(t)\big)dt \geq 0,\ \ x \in [a; b].$$

Звідси

$$\int_a^x f(t)dt - \int_a^x g(t)dt \geq 0 . \ \blacksquare$$

Властивість монотонності функцій використовують при розв'язуванні багатьох задач елементарної математики.

Зокрема, за допомогою теореми 1, проінтегрувавши почленно обидві частини відомої нерівності, можна одержати низку нових нерівностей.

Наприклад, при $x \geq 0$ маємо очевидну нерівність $e^x \geq 1$. Застосуємо теорему 1, поклавши $f(x) = e^x$ і $g(x) = 1$. Функції $f$ і $g$ задовольняють умови цієї теореми на проміжку $[0; +\infty]$. Тому для довільного $x \geq 0$

$$\int_0^x e^t dt \geq \int_0^x 1 \cdot dt ,$$

тобто

$$e^x \geq x + 1. \tag{1}$$

Застосовуючи той самий метод до нерівності (1), одержимо

$$\int_0^x e^t dt \geq \int_0^x (1+t)dt$$

або

$$e^x - 1 \geq x + \frac{x^2}{2}.$$

Звідси $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$. Продовжуючи аналогічно, маємо:

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},\ e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

і т. д.

Звертаємо увагу на те, що правильність цих нерівностей можна встановити за допомогою диференціального числення (див. §1). Пропонуємо читачам самостійно довести нерівність (1) для від'ємних значень $x$.

У розглянутому прикладі вибір початкової нерівності не складав труднощів. В інших випадках цей перший крок розв'язання задачі не є таким очевидним. Теорема 1 дає фактично прийом для одержання початкової нерівності.

Нехай потрібно перевірити правильність нерівності

$$f(x) \leq g(x),\ x \in [a; b]. \tag{2}$$

Якщо справджується співвідношення

$$f'(x) \leq g'(x),\ x \in [a; b],$$

то, згідно з теоремою (1), має місце і нерівність

$$\int_a^x f'(t)dt \leq \int_a^x g'(t)dt$$

або

$$f(x) - f(a) \leq g(x) - g(a),\ x \in [a; b]. \tag{3}$$

Якщо має місце нерівність $f(a) \leq g(a)$, то, додаючи її почленно до нерівності (3), встановлюємо правильність нерівності (2).

Звідси $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 2(1-\ln 2)$. **14.** а) $\frac{1}{2}$; б) ln 3 – 1; в) $2-\sqrt{3}$. **16.** Нехай $x > 1$, тоді $\frac{1}{x} < 1$; $\int\limits_1^x \frac{dt}{t} < \int\limits_1^x 1\cdot dt$, тобто $\ln x < x$. Оскільки $\ln x > 0$, то $0 < \ln x < x$. Далі, $\ln x = 2\ln x^{\frac{1}{2}}$, $0 < \frac{\ln x}{x} = \frac{2\ln x^{\frac{1}{2}}}{x} < \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x} = 2x^{-\frac{1}{2}}$. При $x \to +\infty$ $x^{-\frac{1}{2}} \to 0$, $\frac{\ln x}{x} \to 0$.
**20.** 0. **24.** Так. **27.** $\frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$, якщо $x \neq 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 0, якщо $x = 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **28.** ctg α – $2^n$ctg $2^n$α. **29.** $\frac{1}{4}(n-2)(n-1)n(n+1)$.
**31.** $\frac{n^2x^{n+3}-(2n^2+2n-1)x^{n+2}+(n+1)^2x^{n+1}-x^2-x}{(x-1)^3}$, якщо $x \neq 1$; $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, якщо $x = 1$. **32.** а) $\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$; б) $4^{n-1}(3n+4)$; в) $1+(2n-1)2^n$; г) $\frac{1}{n+1}$; ґ) $\frac{n}{(n+1)!}$.

## Розділ 3

**3.** $y < x$. **4.** 2. **6.** а) $1-\frac{\pi}{4}$; б) 3; в) $e^2-2$. ***Вказівка***. Спочатку показати, що при $x > 2$ $\ln x < \frac{x}{2}$; г) розв'язків немає; ґ) $1{,}5^{\frac{1}{1{,}5}}$. **11.** $\frac{a\cos\alpha(1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha\sin\alpha}$. **12.** ***Вказівка.*** Довести, що $\lim\limits_{k\to\infty}\angle A_{k-1}A_kA_{k+1} = 60°$. **15.** ***Вказівка***. Спочатку довести, що якщо в кінцях $A$ і $B$ дуги кола $ACB$ ($\angle ACB > 90°$) проведено дотичні до перетину у точці $D$, через середину $C$ дуги проведено дотичну до кола, яка перетинає сторони $AD$ і $BD$ трикутника $ABD$ у точках $E$ і $F$, то $S(\Delta ACB) < 2S(\Delta EDF)$.
**16.** Так, якщо $M_1$ — середина $AC$. **17.** а) ***Вказівка***. Скористатися рівністю $\cos x = -3\cos\frac{x}{3} + 4\cos^3\frac{x}{3}$; б) ***вказівка***. Скористатися рівністю ctg $x$ = 2ctg $2x$ + + tg $x$. **18.** а) ***Вказівка.*** Скористатися рівністю 1 на с. 108. **19.** Скористатися результатами вправи 18. **20.** $ax$, $a \le 0$. **21.** $ax$, $a > 0$. ***Вказівка***. Довести монотонність $f(x)$. **22.** $\int\limits_0^x f(u+y)du = \int\limits_0^x \big(f(u)+f(y)\big)du = \int\limits_0^x f(u)du + f(y)x$. Скориставшись формулою Ньютона – Лейбніца і правилом заміни змінної в інтегралі, одержимо $\int\limits_0^x f(u+y)du = \int\limits_y^{x+y} f(z)dz = \int\limits_0^{x+y} f(z)dz - \int\limits_0^y f(z)dz$. **23.** Права частина рівності, одержаної при розв'язанні вправи 22, не змінюється при заміні $x$ на $y$. Тому $yf(x) = xf(y)$. При $x \neq 0$ $f(x)\cdot x^{-1} = a$, де $a$ — константа, тобто $f(x) = ax$. Із адитивності $f(x)$ випливає, що остання рівність справджується і при $x = 0$.

# Перелік використаних джерел


1. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Математика. 11 клас. Рівень стандарту. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. — 480 с.
2. Балк М.Б., Пискарев Г.Ф. О применении производной в тождественных преобразованиях //Математика в шк. — 1977. — № 3. — С. 21 – 25.
3. Баранов И.А., Ястребенецкий Г.А. Применение признака постоянства функций к решению некоторых задач //Математика в шк. — 1980. — № 5. — С. 21 – 24.
4. Бродский Я.С., Слипенко А.К. Функциональные уравнения. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1983. — 96 с.
5. Дороговцев А.Я. Інтеграл та його застосування. — К.: Вища шк.. Головне вид-во, 1974. — 125 с.
6. Дорофеев Г.М. Применение производных при решении задач в школьном курсе математики //Математика в шк. — 1980. — № 5. — С. 12 – 21; № 6. — С. 24 – 30.
7. Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики. — М.: Наука, 1977. — 80 с.
8. Коровкина В.И. Некоторые применения теоремы о пределе последовательности //Математика в шк. — 1978. — № 1. — С. 68 – 70.
9. Лященко М.Я. Застосування похідної для доведення тотожностей //У світі математики. — К., 1980. Вип.. 11. — С. 48 – 61.
10. Суконник Я.Н. Арифметико-геометрическая прогрессия // Квант. — 1975. № 1. — С. 36 – 39.
11. Рижов Ю.М. Границі. — К. : Вища шк.., 1972. — 102 с.
12. Рижов Ю.М. Похідна та її застосування. — К. : Вища шк.., 1977. — 83 с.
13. Ушаков Р.П., Хацет Б.І. Опуклі функції та нерівності. — К.: Вища шк.. Головне вид-во, 1986. — 112 с.
14. Бродский Я.С., Слипенко А.К. Производная и интеграл в неравенствах, уравнениях, тождествах. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1988. — 120 с.

# Зміст

*Навчальне видання*

БРОДСЬКИЙ Яків Соломонович
СЛІПЕНКО Анатолій Костянтинович

# ПОХІДНА ТА ІНТЕГРАЛ У НЕРІВНОСТЯХ, РІВНЯННЯХ, ТОТОЖНОСТЯХ

Головний редактор *Богдан Будний*
Редактор *Володимир Дячун*
Художник обкладинки *Володимир Басалига*
Комп’ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 6.02.2012. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 6,98. Умовн. фарбо-відб. 6,98.
[В. 1].

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК №370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга – Богдан, а/с 529, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46008
тел./факс (0352) 52-19-66; 52-06-07; 52-05-48
E-mail: publishing@budny.te.ua, office@bohdan-books.com
www.bohdan-books.com

ISBN 978-966-10-2520-1

9 789661 025201