БІБЛІОТЕЧКА ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ

О.С. Істер

МАТЕМАТИЧНІ ПЕРЛИНИ

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

ББК 22.1я72
І89

Серію «Бібліотечка фізико-математичної школи» засновано 2010 року

Істер О.С.
І89 Математичні перлини. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. — 88 с.

ISBN 978-966-10-2986-5

У пропонованому посібнику представлено статті, що були в різні роки надруковані автором в періодичних спеціалізованих виданнях з математики.

Посібник містить оригінальні задачі, серед яких багато авторських, та нові методи їхнього розв'язання

Для вчителів та учнів загальноосвітніх шкіл та профільних класів природничого та фізико-математичного спрямування.

ББК 22.1я72

ISBN 978-966-10-0742-9 (серія)
ISBN 978-966-10-2986-5

Від автора

У пропонованому посібнику представлено 10 статей, що були в різні роки надруковані автором в газеті «Математика» та журналі «Математика в школі».

Учні середньої та старшої школи знайдуть у книзі оригінальні задачі, серед яких багато авторських, та нові методи їхнього розв'язання. Колегам-вчителям, сподіваюсь, книга буде корисною для підготовки до уроків та для позакласної роботи.

Зауваження та пропозиції надсилайте на адресу: ister@i.com.ua.

Відвідайте наші сторінки в Інтернеті: www.bohdan-books.com та ister.in.ua.

Статті, що ввійшли у книгу

№	Назва статті	Де надрукована
1	Тригонометричні підстановки	«Математика» №8 за 1998 р. (початок) та «Математика» №9 за 1998 р. (закінчення)
2	Олімпіадні «ігри» з остачею від ділення	«Математика» №11 за 1999 р.
3	Багатозначні геометричні задачі	«Математика» №17 за 1999 р.
4	Обернені тригонометричні функції: самостійне плавання на вступному іспиті	«Математика в школі» №2 за 1998 р.
5	Задачі-близнюки	«Математика» №37 за 1999 р.
6	Формули переходу між кутами правильної піраміди	«Математика» №14 за 2000 р. (початок) та «Математика» №15 за 2000 р. (закінчення)
7	Текстові задачі на рух: кількість невідомих більша від кількості рівнянь	«Математика» №21–22 за 2000 р.
8	Математичний футбол	«Математика» №42 за 2000 р.
9	Розв'язування рівнянь, що містять комбінаторні вирази	«Математика» №7 за 2001 р.
10	Розв'язування комбінаторних задач за допомогою рівнянь	«Математика» №10 за 2001 р.

Тригонометричні підстановки

У класичному математичному аналізі тригонометричні підстановки використовуються для підінтегральних виразів, що містять радикали $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$, а також квадрати цих радикалів a^2-x^2, $x^2 \pm a^2$.

Зручними є:

для випадку $\sqrt{a^2-x^2}$ підстановка $x = a\sin t$ (або $x = a\cos t$),

для випадку $\sqrt{x^2+a^2}$ підстановка $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ (або $x = a\,\mathrm{ctg}\,t$),

для випадку $\sqrt{x^2-a^2}$ підстановка $x = \dfrac{a}{\sin t}$ (або $x = \dfrac{a}{\cos t}$).

Ідея тригонометричної підстановки в шкільному курсі математики допомагає звести алгебраїчні вирази, рівняння, нерівності тощо до тригонометричних. Зауважимо, що зручно накладати обмеження на t так, щоб x набував усіх можливих значень з області визначення лише один раз (тобто розглядати один інтервал монотонності відповідної тригонометричної функції).

Пропонуємо дев'ять авторських задач, найзручнішим способом розв'язання яких вважаємо метод тригонометричної підстановки.

Спочатку розглянемо задачі з однією змінною.

1. Підстановка $x = a\sin t$ (або $x = a\cos t$)

Задача 1. Розв'язати рівняння $x^3 + \left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання. Областю допустимих значень є $[-1; 1]$, тому можлива заміна змінної $x = \sin t$, де $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Тоді маємо: $\sin^3 t + |\cos t|^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Оскільки $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, то $\cos t \ge 0$ і $|\cos t| = \cos t$.

Отже, $\left(\sin t+\cos t\right)\left(\sin^2 t-\sin t\cos t+\cos^2 t\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Замінимо $\sin t+\cos t=z$, тоді $z^2=1+2\sin t\cos t$, $\sin t\cos t=\frac{z^2-1}{2}$.

Маємо: $z\left(1-\frac{z^2-1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z^3-3z+\sqrt{2}=0$.

Домножимо обидві частини рівняння на $\left(\sqrt{2}\right)^3$.

Маємо: $\left(\sqrt{2}z\right)^3-6\left(\sqrt{2}z\right)+4=0$.

Виконаємо ще одну заміну: $\sqrt{2}z=u$.

$u^3-6u+4=0$; $\left(u^3-8\right)-\left(6u-12\right)=0$;

$\left(u-2\right)\left(u^2+2u+4\right)-6\left(u-2\right)=0$; $\left(u-2\right)\left(u^2+2u-2\right)=0$;

$u_1=2$; $u_{2,3}=-1\pm\sqrt{3}$.

Тоді $z_1=\sqrt{2}$; $z_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Оскільки $\sin t+\cos t=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right)=\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$, то маємо:

1) $\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$; $\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=1$; $t+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$;

$t=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z.$

Враховуючи, що $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, маємо $t=\frac{\pi}{4}$ і тоді $x=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) $\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; $\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$. Немає розв'язку.

3) $\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; $\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$;

$t=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ n\in Z.$

Враховуючи, що $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, маємо $t=\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\pi}{4}$. Тоді

$$x=\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\cos\frac{\pi}{4}-$$

$$-\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt[4]{3}}{4}.$$

Відповідь. $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt[4]{3}}{4}$.

Задача 2. Розв'язати рівняння $8\sqrt{1-x^2}\left(2x^3-x\right)=1$.

Розв'язання. Оскільки областю допустимих значень рівняння є $[-1;\ 1]$, то можлива заміна $x=\cos t$, де $t\in\left[0;\ \pi\right]$.

Тоді $8\left|\sin t\right|\cos t\left(2\cos^2 t-1\right)=1$.

Оскільки $t\in\left[0;\ \pi\right]$, то $\sin t\geq 0$ і $\left|\sin t\right|=\sin t$. Тоді

$4\left(2\sin t\cos t\right)\cos 2t=1$; $2\left(2\sin 2t\cos 2t\right)=1$; $\sin 4t=\frac{1}{2}$.

Отже,

$$\left[\begin{array}{l}4t=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z,\\ 4t=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z;\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}t=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z,\\ t=\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.\end{array}\right.$$

Враховуючи обмеження для t, маємо:

$$t_1=\frac{\pi}{24};\ t_2=\frac{13\pi}{24};\ t_3=\frac{5\pi}{24};\ t_4=\frac{17\pi}{24}.$$

Тоді

$$x_1=\cos\frac{\pi}{24}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}}{4}.$$

Дивовижний факт про те, що x^4 (де x — ціле число) при діленні на 16 дає лише остачі 0 і 1, можна використати так.

Задача 5. Розв'язати в цілих числах рівняння

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \ldots + x_{13}^4 + x_{14}^4 = 1999^{1999}.$$

Розв'язання.

Лема. При діленні на 16 число x^4 (де x — ціле число) дає лише остачу 0 або 1.

Доведення. Якщо $n = 2m$ $(m \in Z)$ — парне, то $n^4 = (2m)^4 = 16m^4$ ділиться на 16 (остача 0). Якщо $n = 2m+1$ $(m \in Z)$ — непарне, то

$n^4 - 1 = (2m+1)^4 - 1 = \left((2m+1)^2 - 1\right)\left((2m+1)^2 + 1\right) =$

$= (4m^2 + 4m)(4m^2 + 4m + 2) = 8(m^2 + m)(2m^2 + 2m + 1) =$

$= 8m(m+1)(2m^2 + 2m + 1)$.

Оскільки m і $m + 1$ — два послідовних цілих числа, то одне з них ділиться на 2, а отже, $n^4 - 1$ ділиться на 16, тому $n^4 = 16m + 1$ і n^4 при діленні на 16 дає остачу 1.

Лему доведено.

Отже, сума $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \ldots + x_{13}^4 + x_{14}^4$ при діленні на 16 може давати остачі 0, 1, 2, 3, ..., 14 і не може давати остачу 15. Розглянемо, яку остачу при діленні на 16 дає число 1999^{1999}. Міркуючи аналогічно, як у попередній задачі, маємо: $1999^{1999} = (2000-1)^{1999} = (16 \cdot 125 - 1)^{1999} =$ $= 16p - 1 = 16p - 16 + 15 = 16(p-1) + 15$, де p — ціле число.

А отже, 1999^{1999} при діленні на 16 дає остачу 15. Тому рівняння розв'язків не має.

Автор сподівається, що наведена таблиця, а також задачі (з яких чотири — авторські) допоможуть читачеві скласти багато нових цікавих задач, а школярам та студентам досягти перемог на олімпіадах.

Багатозначні геометричні задачі

Розв'язування геометричної задачі, як правило, починається з рисунка. Більшість задач шкільного підручника має однозначне геометричне тлумачення, а тому однозначною є і побудова рисунка.

Але на олімпіадах, вступних іспитах тощо зустрічаються задачі, умова яких задовольняє різні геометричні ситуації. Будемо такі задачі називати *багатозначними*. Розглядаючи різні варіанти, як правило, дістають різні відповіді.

Багатозначні задачі є традиційно важкими для розв'язування, а тому, на думку автора, з такими задачами потрібно знайомити учнів, починаючи з перших уроків геометрії у 7-му класі. Наведемо невелику добірку таких задач (у дужках подано відповіді).

1. Основні властивості геометричних фігур

1. Точки A, B і C лежать на одній прямій. $AB = 3$ см, $BC = 5$ см. Чому дорівнює довжина відрізка AC? (2 см або 8 см).

2. Точки A, B і C лежать на одній прямій. Довжина відрізка AC у 2 рази більша, ніж довжина відрізка BC, $AB = 15$ см. Знайти довжини відрізків AC і BC. ($AC = 10$ см, $BC = 5$ см або $AC = 30$ см, $BC = 15$ см).

3. $\angle AOB = 30^\circ$, $\angle BOC = 40^\circ$. Знайти $\angle AOC$. (10° або 70°).

4. $\angle AOB = 100^\circ$, $\angle BOC = 120^\circ$. Знайти $\angle AOC$. (20° або 140°).

5. $\angle AOB : \angle BOC = 3 : 4$, $\angle AOC = 35^\circ$. Знайти $\angle AOB$ і $\angle BOC$. ($\angle AOB = 15^\circ$, $\angle BOC = 20^\circ$ або $\angle AOB = 105^\circ$, $\angle BOC = 140^\circ$).

2. Суміжні та вертикальні кути

6. $\angle AOB$ і $\angle BOC$ — суміжні, $\angle AOB = 60^\circ$, $\angle BOD = 30^\circ$. Знайти $\angle DOC$. (150° або 90°).

7. $\angle AOB = 80^\circ$, $\angle AOC = 40^\circ$. Чи можна стверджувати, що промінь OC — бісектриса $\angle AOB$? (Ні).

Задача 4. З групи атлетів треба вибрати трьох штангістів для участі в міжнародних змаганнях. Скільки в групі атлетів, якщо відомо, що це можна зробити 84 способами?

Розв’язання. Нехай в групі n атлетів. За умовою, $C_n^3 = 84$, або $\frac{n!}{3!\cdot(n-3)!} = 84$, $n(n-1)(n-2) = 504 = 9\cdot 8\cdot 7$. Використавши вже знайомий прийом (див. статтю «Розв’язування рівнянь, що містять комбінаторні вирази», приклад 20), дістанемо, що $n = 9$ — єдиний корінь цього рівняння. Отже, в групі 9 атлетів.

Задача 5. В районній фірмі «Свято» Дідів Морозів на 4 більше, ніж Снігуроньок. Для поздоровлення мешканців району з представників фірми вибирають 4 пари. Скільки працює Дідів Морозів і Снігуроньок, якщо відомо, що це можна зробити $\frac{10!}{48}$ способами?

Розв’язання. Занумеруємо пари, що мають бути обрані. Нехай є x Снігуроньок і $x + 4$ Дідів Морозів. З урахуванням нумерації, Дідів Морозів можемо розставити по парах A_{x+4}^4 способами, а Снігуроньок — A_x^4 способами. Зауважимо, що порядок пар не враховується. Для кожної четвірки пар є P_4 перестановок їх між собою. Отже, маємо $\frac{A_{x+4}^4\cdot A_x^4}{P_4} = \frac{10!}{48}$, або $\frac{(x+4)!}{x!}\cdot\frac{x!}{(x-4)!} = \frac{10!\cdot 24}{48}$, тобто $(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)(x-3) = \frac{10!}{2} = 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10$. І знову, із розгляду строго зростаючої при $x \ge 4$ функції $f(x) = (x+4)(x+3)(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)(x-3)$, дістанемо, що єдиним коренем цього рівняння буде $x = 6$. Отже, у фірмі працюють 6 Снігуроньок і 10 Дідів Морозів.

Задача 6. У класі вчаться 18 учнів. Відомо, що скласти групу чергових з двох хлопчиків і двох дівчат можна 1260 способами. Скільки у класі хлопців і скільки дівчат?

Розв’язання. Нехай у класі x хлопців (зрозуміло, що $2 \le x \le 16$, $x \in \mathrm{N}$), тоді дівчат $18 - x$. Складемо, за умовою задачі, рівняння $C_x^2\cdot C_{18-x}^2 = 1260$, $\frac{x!}{2!\cdot(x-2)!}\cdot\frac{(18-x)!}{2!\cdot(16-x)!} = 1260$, $x(x-1)(18-x)(17-x) = 5040$. Позначимо $x = t + 9$ (зрозуміло, що $-7 \le t \le 7$, $t \in Z$). Маємо $(t+9)(t+8)(9-t)(8-t) = 5040$. Тоді $(81-t^2)(64-t^2) = 5040$, $t^4 - 145t^2 + 144 = 0$. Розв’язуючи останнє рівняння як біквадратне, отримаємо, що $t \in \{-12, -1, 1, 12\}$. Враховуючи обмеження на t, дістанемо, що $t = 1$, тоді $x = 10$, або $t = -1$, тоді $x = 8$. Отже, в класі 10 хлопчиків і 8 дівчат або 8 хлопчиків і 10 дівчат.

Задача 7. Від шахового гуртка треба послати дві команди по 3 чоловіки на різні змагання. Відомо, що це можна зробити 560 способами. Скільки учнів займаються у цьому гуртку?

Розв’язання. Нехай у цьому гуртку займаються n учнів. Тоді першу команду можна сформувати C_n^3 способами, а другу — C_{n-3}^3 способами. Тоді з умови випливає, що $C_n^3\cdot C_{n-3}^3 = 560$, звідки $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) = 6\cdot 6\cdot 560 = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3$. За умовою, $n \ge 6$. Отже (розв’язання аналогічне до розв’язання попередніх задач), $n = 8$. Тому в гуртку займаються 8 учнів.

Задача 8. У вазі 12 білих і рожевих гвоздик, що пронумеровані. Відомо, що букет з двох білих і однієї рожевої гвоздики можна скласти 105 способами. Скільки у вазі гвоздик кожного кольору?

Розв’язання. Нехай у вазі n білих гвоздик, тоді рожевих — $12 - n$. Зрозуміло, що $2 \le n \le 11$ (*). Даний букет можна скласти $C_n^2\cdot C_{12-n}^1$ способами. Тоді $C_n^2\cdot C_{12-n}^1 = 105$, звідки маємо $\frac{n(n-1)}{2}\cdot(12-n) = 105$, $n^3 - 13n^2 + 12n + 210 = 0$. Оскільки $n \in \mathrm{N}$, то корінь одержаного рівняння потрібно шукати серед тих дільників числа 210, які задовольняють умову (*), тобто серед чисел 2, 3, 5, 6, 7, 10. Єдиним із них, що задовольняє рівняння, буде 7. Отже, $n = 7$ — єдиний розв’язок задачі. Тому у вазі було 7 білих і 5 рожевих гвоздик.

Задача 9. В ящику лежать декілька білих і чорних пронумерованих кульок. Відомо, що взяти одну білу і одну чорну кульки разом можна 120 способами, а дві білі і дві чорні разом — 2970 способами. Скільки в ящику білих кульок і скільки чорних?

Зміст

Від автора **3**
Статті, що ввійшли у книгу **4**
Тригонометричні підстановки **5**
1. Підстановка $x = a \sin t$ (або $x = a \cos t$) 5
2. Підстановка $x = a \operatorname{tg} t$ (або $x = a \operatorname{ctg} t$) 8
3. Підстановка $x = \frac{a}{\sin t}$ (або $x = \frac{a}{\cos t}$) 10
4. Задачі з кількома змінними 12
Олімпіадні «ігри» з остачею від ділення **16**
Багатозначні геометричні задачі **23**
1. Основні властивості геометричних фігур 23
2. Суміжні та вертикальні кути 23
3. Ознаки рівності трикутників 24
4. Сума кутів трикутника 24
5. Геометричні побудови 24
Обернені тригонометричні функції: самостійне плавання на вступному іспиті **30**
1. Основні властивості обернених тригонометричних функцій 30
2. Обчислення значень виразів, що містять обернені тригонометричні функції 32
3. Рівняння 34
4. Нерівності 36
Вправи для самостійного виконання 38
Відповіді 39
Задачі-близнюки **40**

Формули переходу між кутами правильної піраміди **43**
Вправи 53
Відповіді 55
Текстові задачі на рух: кількість невідомих більша від кількості рівнянь **56**
Вправи 65
Відповіді 66
Математичний футбол (сценарій гри) **67**
Правила гри 67
Запитання для гри 68
1-й тайм 68
2-й тайм 70
Пенальті 72
Розв'язування рівнянь, що містять комбінаторні вирази **73**
Вправи 80
Відповіді 80
Розв'язування комбінаторних задач з допомогою рівнянь **81**
Вправи 85
Відповіді 85

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

МАТЕМАТИЧНІ ПЕРЛИНИ

Головний редактор *Богдан Будний*
Редактор *Володимир Дячун*
Художник обкладинки *Володимир Басалига*
Комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 6.08.2012. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 5,12. Умовн. фарбо-відб. 5,12.
[В. 1].

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК №370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга – Богдан, а/с 529, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46008
тел./факс (0352) 52-19-66; 52-06-07; 52-05-48
E-mail: publishing@budny.te.ua, office@bohdan-books.com
www.bohdan-books.com

ISBN 978-966-10-2986-5

9 789661 029865