1. Степінь з довільним дійсним показником. Показникова функція

У 10 класі ви ознайомилися з поняттям степеня додатного числа з раціональним показником. Тепер ми з'ясуємо, що являє собою степінь додатного числа з дійсним показником.

Строге означення степеня з дійсним показником та доведення його властивостей виходить за межі навчальної програми. Текст цього пункту містить лише загальні пояснення того, як можна провести необхідні обґрунтування.

Почнемо з розгляду окремого випадку. З'ясуємо, що розуміють під степенем числа 2 з показником π.

Ірраціональне число π можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу:

$$\pi = 3{,}1415\ldots .$$

Розглянемо послідовність раціональних чисел

$$3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ \ldots . \qquad (1)$$

Зрозуміло, що ця послідовність збігається до числа π.

Відповідно до послідовності (1) побудуємо послідовність степенів з раціональними показниками:

$$2^3,\ 2^{3,1},\ 2^{3,14},\ 2^{3,141},\ 2^{3,1415},\ \ldots . \qquad (2)$$

Можна показати, що члени послідовності (2) зі збільшенням номера прямують до деякого додатного числа. Це число називають степенем числа 2 з показником π і позначають 2^π.

Аналогічно можна діяти в загальному випадку, означаючи зміст виразу b^α, де $b > 0$, α — довільне дійсне число. Для числа α будують збіжну до нього послідовність раціональних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Далі розглядають послідовність b^{α_1}, b^{α_2}, b^{α_3}, ... степенів з раціональними показниками (нагадаємо, що степінь додатного числа з раціональним показником є визначеним). Можна довести, що ця послідовність збігається до додатного числа c, яке не залежить від вибору збіжної до α послідовності раціональних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Число c називають степенем додатного числа b з дійсним показником α і позначають b^α.

Якщо основа b дорівнює одиниці, то $1^\alpha = 1$ для всіх дійсних α.

Якщо основа b дорівнює нулю, то степінь 0^α означають тільки для $\alpha > 0$ і вважають, що $0^\alpha = 0$. Наприклад, $0^{\sqrt{2}} = 0$, $0^\pi = 0$, а вираз $0^{-\sqrt{3}}$ не має змісту.

При $b < 0$ вираз b^α, де α — ірраціональне число, не має змісту.

Степінь з дійсним показником має ті самі властивості, що й степінь з раціональним показником.

Зокрема, для $x > 0$, $y > 0$ та будь-яких дійсних α і β справедливі такі рівності:

1) $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$;
2) $x^\alpha : x^\beta = x^{\alpha-\beta}$;
3) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$;
4) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$;
5) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$.

Доведемо, наприклад, властивість 1.

Нехай α і β — дійсні числа, причому $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n$, де (α_n) і (β_n) — послідовності раціональних чисел. Маємо:

$$\alpha + \beta = \lim_{n\to\infty}\alpha_n + \lim_{n\to\infty}\beta_n = \lim_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n).$$

Для додатного числа x розглянемо три послідовності: (x^{α_n}), (x^{β_n}) і $(x^{\alpha_n}\cdot x^{\beta_n})$. Маємо: $\lim\limits_{n\to\infty} x^{\alpha_n} = x^\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^{\beta_n} = x^\beta$.

Оскільки для раціональних показників α_n і β_n властивість 1 має місце (ми дізналися про це, вивчаючи властивості степеня з раціональним показником), то $x^{\alpha_n}\cdot x^{\beta_n} = x^{\alpha_n+\beta_n}$.

Послідовність раціональних чисел $\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \alpha_3+\beta_3, \ldots$ збігається до числа $\alpha+\beta$. Тому можна записати, що $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = x^{\alpha+\beta}$.

$$x^\alpha\cdot x^\beta = \lim_{n\to\infty} x^{\alpha_n}\cdot\lim_{n\to\infty} x^{\beta_n} = \lim_{n\to\infty}(x^{\alpha_n}\cdot x^{\beta_n}) = \lim_{n\to\infty} x^{\alpha_n+\beta_n} = x^{\alpha+\beta}.$$

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз $\dfrac{(a^{\sqrt{7}}+1)(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}})}{a^{4\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{(a^{\sqrt{7}}+1)(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}})}{a^{4\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}} = \frac{(a^{\sqrt{7}}+1)(a^{2\sqrt{7}}-a^{\sqrt{7}}+1)a^{\sqrt{7}}}{(a^{3\sqrt{7}}+1)a^{\sqrt{7}}} = \frac{a^{3\sqrt{7}}+1}{a^{3\sqrt{7}}+1} = 1. \blacktriangleleft$$

Виберемо деяке додатне число a, відмінне від 1. Кожному дійсному числу x можна поставити у відповідність число a^x. Тим самим задамо функцію $f(x) = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, з областю визначення $\mathbb{R}$. Цю функцію називають **показниковою функцією**.

З'ясуємо деякі властивості показникової функції.

При $a > 0$ і будь-якому x виконується нерівність $a^x > 0$, тому область значень показникової функції складається тільки з додатних чисел.

Можна показати, що для даного числа a, де $a > 0$ і $a \neq 1$, і для будь-якого додатного числа b існує таке число x, що виконується рівність $a^x = b$.

- Сказане означає, що *областю значень показникової функції є множина* $(0; +\infty)$.
- *Показникова функція не має нулів, і проміжок* $(-\infty; +\infty)$ *є її проміжком знакосталості.*
- *Показникова функція є неперервною.*
- Покажемо, що *при* $a > 1$ *показникова функція є зростаючою.* Для цього скористаємося лемою.

Лема. ***Якщо*** $a > 1$ ***і*** $x > 0$, ***то*** $a^x > 1$; ***якщо*** $0 < a < 1$ ***і*** $x > 0$, ***то*** $0 < a^x < 1$.

Наприклад, $2^{\frac{1}{\pi}} > 1$, $0 < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < 1$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_2 > x_1$, і функцію $f(x) = a^x$, де $a > 1$.

Оскільки $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Тоді за лемою маємо: $a^{x_2 - x_1} > 1$, тобто $\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1$. Оскільки $a^{x_1} > 0$, то $a^{x_2} > a^{x_1}$. Звідси $f(x_2) > f(x_1)$.

Отже, ми показали, що з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$. Це означає, що функція f є зростаючою.

- Аналогічно можна показати, що *при* $0 < a < 1$ *показникова функція є спадною.*
- Оскільки показникова функція є або зростаючою (при $a > 1$), або спадною (при $0 < a < 1$), то вона *не має точок екстремуму.*
- *Показникова функція є диференційовною.* Детальніше про похідну показникової функції ви дізнаєтеся в п. 8.

На рисунках 1.1 і 1.2 схематично зображено графік показникової функції для випадків $a > 1$ і $0 < a < 1$ відповідно.

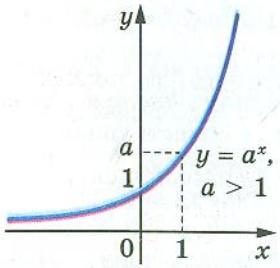

Рис. 1.1

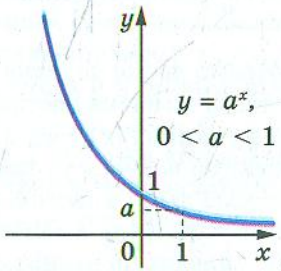

Рис. 1.2

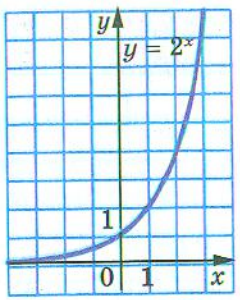

Рис. 1.3

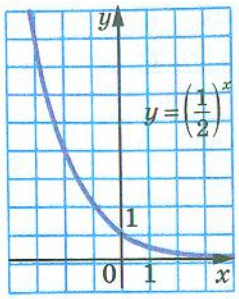

Рис. 1.4

Зокрема, на рисунках 1.3 і 1.4 зображено графіки функцій $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Зауважимо, що при $a > 1$ графік показникової функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$. Аналогічно при $0 < a < 1$ графік показникової функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$.

Показникова функція є математичною моделлю багатьох процесів, які відбуваються в природі та в діяльності людини.

Наприклад, біологам відомо, що колонія бактерій у певних умовах за рівні проміжки часу збільшує свою масу в одну й ту саму кількість разів.

Це означає, що коли, наприклад, у момент часу $t = 0$ маса дорівнювала 1, а в момент часу $t = 1$ маса дорівнювала a, то в моменти часу $t = 2$, $t = 3$, ..., $t = n$, ... маса дорівнюватиме відповідно a^2, a^3, ..., a^n, ... Тому природно вважати, що в будь-який момент часу t маса дорівнюватиме a^t. Можна перевірити (зробіть це самостійно), що значення функції $f(t) = a^t$ збільшується в одну й ту саму кількість разів за рівні проміжки часу.

Таким чином, розглянутий процес описують за допомогою показникової функції $f(t) = a^t$.

З фізики відомо, що під час радіоактивного розпаду маса радіоактивної речовини за рівні проміжки часу зменшується в одну й ту саму кількість разів.

Якщо покласти гроші в банк під певний процент, то кожного року кількість грошей на рахунку буде збільшуватися в одну й ту саму кількість разів.

Отже, показникова функція описує і ці процеси.

У таблиці наведено властивості функції $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, вивчені в цьому пункті.

Область визначення	$\mathbb{R}$
Область значень	$(0; +\infty)$
Нулі функції	–
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на $\mathbb{R}$
Зростання / спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною
Неперервність	Неперервна
Диференційовність	Диференційовна
Асимптоти	Якщо $a > 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$; якщо $0 < a < 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть найменше і найбільше значення функції $f(x) = 3^x$ на проміжку $[-4; 3]$.

Розв'язання. Оскільки функція f зростає на проміжку $[-4; 3]$, то найменшого значення вона набуває при $x = -4$, а найбільшого — при $x = 3$. Отже,

$$\min_{[-4;3]} f(x) = f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81},$$
$$\max_{[-4;3]} f(x) = f(3) = 3^3 = 27.$$

Відповідь: $\frac{1}{81}$, 27. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $(\sqrt{2}-1)^{|x|} = \sin^2 x + 1$.

Розв'язання. Оскільки $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, а $|x| \geqslant 0$, то $(\sqrt{2}-1)^{|x|} \leqslant (\sqrt{2}-1)^0 = 1$. Водночас $\sin^2 x + 1 \geqslant 1$. Таким чином, дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} (\sqrt{2}-1)^{|x|} = 1, \\ \sin^2 x + 1 = 1. \end{cases}$$

Звідси $x = 0$.
Відповідь: 0. ◄

1. Сформулюйте властивості степеня з дійсним показником.
2. Яких значень набуває вираз x^α, де $\alpha > 0$, при $x > 1$? при $0 < x < 1$?
3. Яку функцію називають показниковою?
4. Яка область визначення показникової функції?
5. Яка область значень показникової функції?
6. Скільки нулів має показникова функція?
7. При яких значеннях a показникова функція $y = a^x$ є зростаючою? спадною?
8. Чи має показникова функція точки екстремуму?
9. Який вигляд має графік функції $y = a^x$ при $a > 1$? при $0 < a < 1$?

ВПРАВИ

1.1.° Обчисліть значення виразу:

1) $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$;
2) $\left(\left(3\sqrt[3]{7}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$;
3) $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}}$;
4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$.

1.2.° Знайдіть значення виразу:

1) $5^{(\sqrt{3}-1)^2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{2\sqrt{3}}$;
2) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$;
3) $\left(\left(\sqrt[5]{10}\right)^{\sqrt{5}}\right)^{-2\sqrt{5}}$.

1.3.° Доведіть, що:

1) $\frac{5^{\sqrt{8}}}{5^{\sqrt{2}}} = 5^{\sqrt{2}}$;
2) $4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}} = \left(16^{\sqrt{3}}\right)^{-2}$;
3) $\frac{12^{\sqrt{48}} \cdot 2^{4\sqrt{12}}}{4^{\sqrt{108}} \cdot 6^{\sqrt{27}}} = 6^{\sqrt{3}}$.

1.4.° Порівняйте із числом 1 степінь:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$;
2) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\pi}$;
3) $0{,}6^{2\sqrt{5}}$;
4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$;
5) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\pi}$;
6) $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-\sqrt{6}}$.

1.5.° Які з даних чисел більші за 1, а які менші від 1?

1) $1{,}8^{\sqrt{1{,}8}}$;
2) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\sqrt{10}}$;
3) $7^{-\sqrt{2}}$;
4) $0{,}3^{-\pi}$.

1.6.° Яка з даних функцій є показниковою:

1) $y = x^6$;
2) $y = \sqrt[6]{x}$;
3) $y = 6^x$;
4) $y = 6$?

1.7.° Ґрунтуючись на якій властивості показникової функції можна стверджувати, що:

1) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3,2} < \left(\frac{7}{9}\right)^{2,9}$; 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,8} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1,6}$?

1.8.° Укажіть, які з даних функцій є зростаючими, а які — спадними:

1) $y = 10^x$; 3) $y = 2^{-x}$; 5) $y = 2^x \cdot 3^x$;

2) $y = \left(\frac{5}{9}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$; 6) $y = 12^x \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^x$.

1.9.° Побудуйте графік функції $y = 3^x$. Як змінюється значення функції, коли x зростає від -1 до 3 включно?

1.10.° Побудуйте графік функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Як змінюється значення функції, коли x зростає від -2 до 2 включно?

1.11.° Порівняйте із числом 1 додатне число a, якщо:

1) $a^{\frac{5}{6}} > a^{\frac{2}{3}}$; 2) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{2}}$; 3) $a^{-0,3} > a^{1,4}$; 4) $a^{-\sqrt{7}} < a^{1,2}$.

1.12.° Порівняйте числа m і n, якщо:

1) $0,8^m < 0,8^n$; 2) $3,2^m > 3,2^n$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^m > \left(\frac{2}{3}\right)^n$; 4) $\left(1\frac{4}{7}\right)^m < \left(1\frac{4}{7}\right)^n$.

1.13.• Спростіть вираз:

1) $\left(a^{\sqrt{5}}+2\right)\left(a^{\sqrt{5}}-2\right)-\left(a^{\sqrt{5}}+3\right)^2$; 3) $\frac{a^{2\sqrt{3}}-b^{2\sqrt{2}}}{\left(a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}\right)^2}+1$;

2) $\frac{a^{2\sqrt{7}}-a^{\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{3\sqrt{7}}}$; 4) $\frac{a^{\sqrt[3]{24}}-1}{a^{\sqrt[3]{3}}-1}-\frac{a^{\sqrt[3]{81}}+1}{a^{\sqrt[3]{3}}+1}$.

1.14.• Спростіть вираз:

1) $\frac{\left(a^{2\sqrt{6}}-1\right)\left(a^{\sqrt{6}}+a^{2\sqrt{6}}+a^{3\sqrt{6}}\right)}{a^{4\sqrt{6}}-a^{\sqrt{6}}}$; 2) $\left((a^{\pi}+b^{\pi})^2-(a^{\pi}-b^{\pi})^2\right)^{\frac{1}{\pi}}$.

1.15.• Чи є правильним твердження:

1) найбільше значення функції $y = 0,2^x$ на проміжку $[-1; 2]$ дорівнює 5;

2) областю визначення функції $y = 4 - 7^x$ є множина дійсних чисел;

3) областю значень функції $y = 6^x + 5$ є проміжок $[5; +\infty)$;

4) найменше значення функції $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ на проміжку $[-2; 2]$ дорівнює 16?

1.16.• Знайдіть область значень функції:

1) $y = -9^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x + 1$; 3) $y = 7^x - 4$; 4) $y = 6^{|x|}$.

1.17.• Знайдіть найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ на проміжку $[-2; 3]$.

1.18.• На якому проміжку найбільше значення функції $y = 2^x$ дорівнює 16, а найменше — $\frac{1}{4}$?

1.19.• На якому проміжку найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ дорівнює 27, а найменше — $\frac{1}{9}$?

1.20.• Розв'яжіть нерівність:

1) $2^x > -1$; 2) $2^{\sqrt{x}} > -2$.

1.21.• Розв'яжіть нерівність $2^{\frac{1}{x}} > 0$.

1.22.• Побудуйте графік функції:

1) $y = 2^x - 1$; 3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$; 5) $y = -2^x$;

2) $y = 2^{x-1}$; 4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$; 6) $y = 5 - 2^x$.

1.23.• Побудуйте графік функції:

1) $y = 3^x + 1$; 3) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$; 5) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$;

2) $y = 3^{x+1}$; 4) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$; 6) $y = -3^x - 1$.

1.24.• Графік якої з функцій, зображених на рисунку 1.5, перетинає графік функції $y = 5^x$ більше ніж в одній точці?

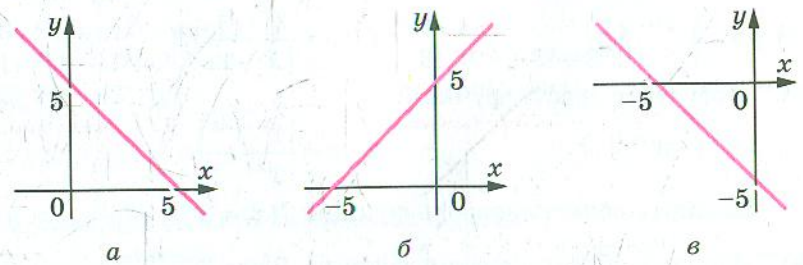

Рис. 1.5

1.25.• На рисунку 1.6 укажіть графік функції $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-1$.

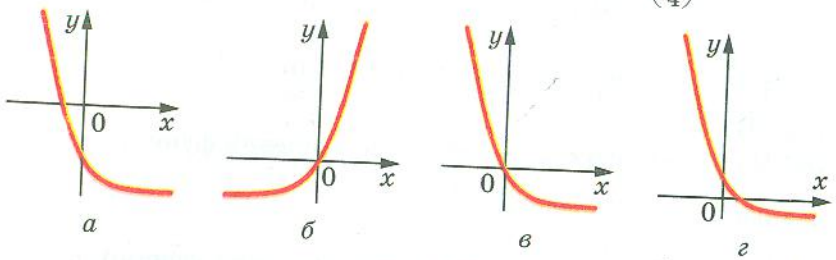

Рис. 1.6

1.26.• Установіть графічно кількість коренів рівняння:
1) $2^x=x$; 2) $2^x=x^2$; 3) $2^x=\sin x$; 4) $2^{-x}=2-x^2$.

1.27.• Установіть графічно кількість коренів рівняння:
1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=x^3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\cos x$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=4-\frac{3}{x}$.

1.28.• Побудуйте графік функції:
1) $y=2^{|x|}$; 3) $y=|2^x-1|$;
2) $y=2^{|x|}+1$; 4) $y=\left|\frac{1}{2^x}-1\right|$.

1.29.• Побудуйте графік функції:
1) $y=\frac{1}{3^{|x|}}$; 2) $y=3^{|x|}-1$; 3) $y=|3^x-1|$.

1.30.•• Порівняйте $(7+4\sqrt{3})^{-5,2}$ і $(7-4\sqrt{3})^{5,6}$.

1.31.•• Порівняйте $(2+\sqrt{3})^{-\pi}$ і $(2-\sqrt{3})^{\pi}$.

1.32.•• Побудуйте графік функції $y=\sqrt{2^{\cos x}-2}$.

1.33.•• Побудуйте графік функції:
1) $y=|2^{-|x|}-1|$; 2) $y=\frac{2^{|x|}-1}{|2^x-1|}$.

1.34.•• Побудуйте графік функції:
1) $y=|1-3^{|x|}|$; 2) $y=\frac{|1-3^{-x}|}{3^{|x|}-1}$.

1.35.•• Знайдіть область значень функції $f(x)=2^{(\sin x+\cos x)^2}$.

1.36.•• Знайдіть область значень функції $f(x)=3^{|\sin x\cos x|}$.

1.37.•• Розв'яжіть рівняння:
1) $2^{\cos x}=x^2+2$; 2) $2^{\sqrt{x}}=\cos x$.

1.38.•• Розв'яжіть рівняння:
1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}=x^2+1$; 2) $2^{|x|}=\cos x$.

1.39.•• Розв'яжіть нерівність:
1) $2^{x^2}\geqslant\sin x$; 2) $2^{-x^2}\geqslant|\sin x|+1$; 3) $2^{\sqrt{x}}\geqslant 1-x^2$.

1.40.•• Розв'яжіть нерівність:
1) $2^{x^2}>\cos x$; 2) $2^{-x^2}\geqslant x^2+1$.

1.41.•• Дослідіть на парність функцію:
1) $y=\frac{2^x-1}{2^x+1}$; 2) $y=(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x$.

1.42.•• Дослідіть на парність функцію:
1) $y=\frac{2^x-3^x}{2^x+3^x}$; 2) $y=(\sqrt{2}+1)^x-(\sqrt{2}-1)^x$.

1.43.* Знайдіть область значень функції $y=\frac{2^x-1}{2^x-4}$.

1.44.* Знайдіть область значень функції $y=\frac{3^x}{3^x-9}$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

1.45. Подайте числа 1; 4; 8; 16; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{64}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{32}$ у вигляді степеня з основою: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$.

1.46. Подайте числа 1; 9; 81; $\frac{1}{27}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt[5]{243}$ у вигляді степеня з основою: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$.

1.47. Спростіть вираз:
1) $7^{x+1}+7^x$; 3) $3^{x+1}+3^x+3^{x-1}$;
2) $2^{x+1}+2^{x-4}$; 4) $9^{x+1}+3^{2x+1}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1.48. Знайдіть область визначення функції:
1) $f(x)=\frac{x+2}{x^2-2x-8}$; 2) $f(x)=\sqrt{16x-x^3}$.