Цікаві факти з історії розвитку та становлення математики як науки ви знайдете у рубриці «А ще раніше...».

Шановні вчительки та вчителі!

Пропонований підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках і позаурочних заняттях та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, ступеня диференціації навчання тощо.

«Вправи на повторення курсу алгебри 7 класу» допоможуть діагностувати вміння й навички учнів з алгебри за попередній рік та повторити навчальний матеріал. Додаткові вправи рубрики «Завдання для перевірки знань» призначено для учнів, які впоралися з основними завданнями раніше за інших учнів. Правильне їх розв'язання вчитель може оцінити окремо. Вправи для повторення розділів можна запропонувати учням під час узагальнюючих уроків або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року. «Задачі підвищеної складності» та «Цікаві задачі для учнів неледачих» допоможуть задовольнити підвищену цікавість учнів до предмета і сприятимуть їх підготовці до різноманітних математичних змагань.

Шановні батьки!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків алгебри, потрібно запропонувати їй за підручником удома самостійно опрацювати матеріал цих уроків. Спочатку дитина має прочитати теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою та містить значну кількість зразків розв'язування вправ, а потім із запропонованих у відповідному параграфі завдань розв'язати посильні їй вправи.

Упродовж опрацювання дитиною курсу алгебри 8 класу ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

Розділ 1

Раціональні вирази

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** основну властивість звичайного дробу та основні властивості рівнянь;
- **ознайомитеся** з поняттями раціонального виразу, раціонального дробу, раціонального рівняння; з функцією $y = \frac{k}{x}$, степенем із цілим показником, стандартним виглядом числа;
- **навчитеся** скорочувати раціональні дроби та зводити їх до нового знаменника; виконувати арифметичні дії з раціональними дробами; розв'язувати раціональні рівняння.

§ 1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ. РАЦІОНАЛЬНІ ДРОБИ

У курсі алгебри 7 класу ви вже знайомилися із ***цілими раціональними виразами***, тобто з виразами, що не містять ділення на вираз зі змінною, наприклад:

$$5m^2p; \quad 4c^3 + t^9; \quad (m - n)(m^2 + n^7); \quad k^9 - \frac{p + l}{4}.$$

Будь-який цілий вираз можна подати у вигляді многочлена стандартного вигляду, наприклад:

$(m - n)(m^2 + n^7) = m^3 + mn^7 - nm^2 - n^8;$

$k^9 - \frac{p + l}{4} = k^9 - \frac{1}{4}p - \frac{1}{4}l.$

На відміну від цілих виразів, вирази

$$5m - \frac{3}{p}; \quad \frac{x + 2}{y - 9}; \quad \frac{1}{5}x - \frac{19}{m^2}; \quad \frac{a - b}{a^2 + ab + b^2}; \quad \frac{1}{(x - y)(x^2 + 7)}$$

містять ділення на вираз зі змінною. Такі вирази називають ***дробовими раціональними виразами***.

Цілі раціональні і дробові раціональні вирази називають ***раціональними виразами***.

Раціональні вирази **— це математичні вирази, які містять дії додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня.**

Цілий раціональний вираз має зміст при будь-яких значеннях змінних, що до нього входять, оскільки для знаходження його значення треба виконати дії додавання, віднімання і множення та ділення на число, відмінне від нуля, що завжди можливо.

Вираз вигляду $\frac{P}{Q}$, де P і Q – многочлени, називають *раціональним дробом*.

Розглянемо раціональний дріб $\frac{5}{x-3}$. Його значення можна знайти для будь-якого значення x, крім $x = 3$, оскільки при $x = 3$ знаменник дробу дорівнюватиме нулю. У такому випадку кажуть, що вираз $\frac{5}{x-3}$ має зміст при всіх значеннях змінної x, крім $x = 3$ (або при $x = 3$ не має змісту).

Значення змінних, при яких вираз має зміст, називають *допустимими значеннями змінних* у виразі.

Ці значення утворюють ***область визначення виразу***, або ***область допустимих значень змінних*** у виразі.

Приклад 1. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\frac{m-3}{9}$; 2) $\frac{5}{p+2}$; 3) $\frac{x+7}{x(x-9)}$; 4) $\frac{7}{|y|-3}$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Вираз має зміст при будь-яких значеннях змінної m. 2) Допустимі значення змінної p – усі числа, крім числа -2, оскільки це значення змінної перетворює знаменник дробу на нуль. 3) Знаменник дробу перетворюється на нуль, якщо $x = 0$ або $x = 9$. Тому допустимі значення змінної x – усі числа, крім чисел 0 і 9. 4) Допустимі значення змінної y – усі числа, крім 3 і -3.

Скорочено *відповіді* можна записати так: 1) m – будь-яке число; 2) $p \neq -2$; 3) $x \neq 0$; $x \neq 9$; 4) $y \neq 3$; $y \neq -3$.

Розглянемо **умову рівності дробу нулю**. Оскільки $\frac{0}{Q} = 0$, якщо $Q \neq 0$, то $\frac{P}{Q} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $P = 0$, а $Q \neq 0$, тобто за умови $\begin{cases} P = 0, \\ Q \neq 0. \end{cases}$

Приклад 2. При яких значеннях змінної дорівнює нулю значення дробу: 1) $\frac{x-3}{x+1}$; 2) $\frac{(a-2)(a+1)}{a+5}$; 3) $\frac{b(b-7)}{b-7}$?

Р о з в ' я з а н н я. 1) Чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $x = 3$, при цьому знаменник нулю не дорівнює. Тому число 3 є тим значенням змінної, при якому даний дріб дорівнює нулю.

2) Чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $a = 2$ або $a = -1$. При кожному із цих значень знаменник дробу нулю не дорівнює. Тому числа 2 і -1 є тими значеннями змінної, при яких даний дріб дорівнює нулю.

3) Чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $b = 0$ або $b = 7$. Якщо $b = 0$, знаменник дробу нулю не дорівнює, а якщо $b = 7$, знаменник перетворюється на нуль, тобто дріб не має змісту. Отже, даний дріб дорівнює нулю лише при $b = 0$.

В і д п о в і д ь. 1) $x = 3$; 2) $a = 2$, $a = -1$; 3) $b = 0$.

А ще раніше...

Давньогрецький математик Діофант (бл. III ст. н. е.) розглянув раціональні дроби та дії з ними у своїй праці «Арифметика». Зокрема, на сторінках цієї книжки можна зустріти доведення тотожностей

$$30 \cdot \frac{144}{x^4 + 900 - 60x^2} + \frac{60}{x^2 - 30} = \frac{60x^2 + 2520}{x^4 + 900 - 60x^2}$$

та $$\frac{96}{x^4 + 36 - 12x^2} - \frac{12}{6 - x^2} = \frac{12x^2 + 24}{x^4 + 36 - 12x^2},$$

які записано тодішньою символікою.

Видатний англійський учений Ісаак Ньютон (1643–1727) у своїй монографії «Універсальна арифметика» (1707 р.) означає дріб наступним чином: «Запис однієї з двох величин під іншою, нижче якої між ними проведено риску, означає частку або ж величину, що виникає при діленні верхньої величини на нижню». У цій роботі Ньютон розглядає не тільки звичайні дроби, а й раціональні.

Які вирази називають цілими раціональними виразами, а які – дробовими раціональними виразами? Наведіть приклади таких виразів. Які вирази називають раціональними виразами? Що таке раціональний дріб? Наведіть приклади. Що називають допустимими значеннями змінної? Сформулюйте умову рівності дробу $\frac{P}{Q}$ нулю.