О.Н. Афанасьева
Я.С. Бродский
А.Л. Павлов
А.К. Слипенко

МАТЕМАТИКА

10 класс

Учебник для общеобразовательных учебных заведений

Уровень стандарта

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины

ТЕРНОПОЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

ББК 22.1я72
74.262.21
А94

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины
(приказ МОН Украины №177 от 03.03.2010 г.)

Афанасьева О.Н., Бродский Я.С., Павлов А.Л., Слипенко А.К.
А94 Математика. 10 класс. Учебник для общеобраз. уч. заведений: Уровень стандарта. — Тернополь: Навчальна книга – Богдан, 2011. — 496 с.

ISBN 978-966-10-1703-9

Предлагаемый учебник соответствует программе по математике для 10-го класса уровня стандарта, рекомендован Министерством образования и науки Украины. Он направлен на подготовку учащихся к широкому и сознательному применению математики. Эту ориентацию обеспечивают содержание курса, характер изложения учебного материала, отбор иллюстраций и примеры приложений, система упражнений и контрольных вопросов.

Для учащихся и учителей общеобразовательных учебных заведений.

ББК 22.1я72

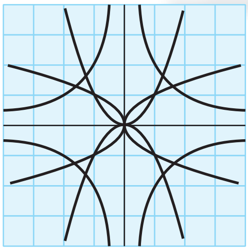
ISBN 978-966-10-1703-9

Раздел 1.

ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

Каждому человеку постоянно приходится иметь дело с различными зависимостями между величинами. Поэтому изучение зависимостей является основным содержанием обучения в школе, а также в высшем учебном заведении. Чтобы убедиться в этом, достаточно полистать страницы учебников по физике, химии, техническим или общественным дисциплинам, научно-популярных журналов и других изданий. С окончанием учебы не исчезает потребность учитывать, рассматривать и исследовать различные зависимости. Для строителей важной является зависимость стоимости строительства от его длительности, зависимость качества выполненных работ от качества строительных материалов. Для предприятий автомобильного транспорта представляет интерес зависимость расходов топлива от качества дорог. Перечень таких примеров из народного хозяйства, быта, политики и других сфер деятельности человека можно продолжить.

Начиная с XVII ст. изучение важнейших типов зависимостей стало одной из основных задач математики. В математику прочно вошли понятия переменной величины и функции, которые стали и остаются до настоящего времени мощными средствами моделирования реальных процессов, а потому и одними из главных объектов исследования. В данном разделе заложены основы для изучения функциональных зависимостей между переменными величинами, выделены некоторые важнейшие классы функций, изучаются элементарные методы исследования функций, а также продолжается изучение одной из наиболее применимых функций — степенной.



Готовимся к изучению темы «Функции, их свойства и графики»

Изучение темы «Функции, их свойства и графики» базируется практически на всем алгебраическом материале, изучавшемся в предыдущих классах. Главное предназначение этой темы как раз и заключается в его повторении, систематизации и углублении. Соответствующий материал представлен в виде таблиц.

Числа и вычисления

Таблица 1

Тема	Содержание	Примеры
Обыкновенные дроби	Сложение и вычитание дробей з одинаковыми знаменателями: $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$; $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$. Чтобы сложить или вычесть дроби с разными знаменателями, их вначале приводят к общему знаменателю, а затем выполняют действие по правилу сложения или вычитания дробей с одинаковыми знаменателями. Умножение: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. Деление: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.	$\frac{3}{5}+\frac{5}{6}=\frac{18}{30}+\frac{25}{30}=$ $=\frac{43}{30}=1\frac{13}{30}$.

Тема	Содержание
Проценты и пропорции	$1\ \% = 0{,}01$. $p\ \%$ от числа a равны $\dfrac{ap}{100}$. Если $p\ \%$ от числа a равны b, то $a = \dfrac{b}{p}\cdot 100$. Процентное отношение чисел a и b равно $\dfrac{a}{b}\cdot 100\%$. Основное свойство пропорции $a : b = c : d$ — $ad = bc$.

Выражения и их преобразования

Таблица 2

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b), \qquad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

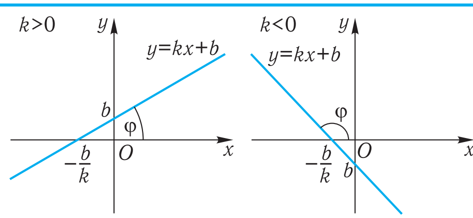
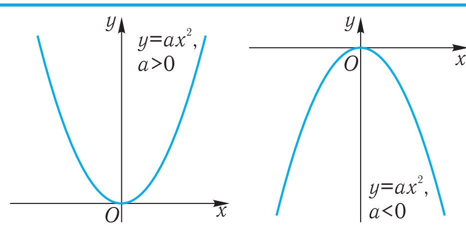
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3, \qquad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2),$$

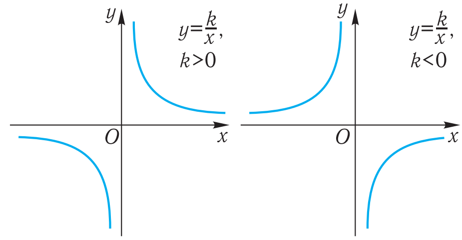
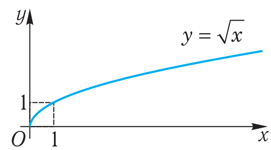
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2), \qquad ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c = 0$.

Функции и графики

Таблица 3

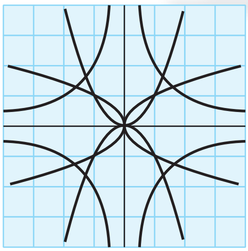
<table>
<tr><td>1. Линейная функция y = kx + b.
График — прямая, не параллельная оси y. Коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой к оси x: $k = \operatorname{tg}\varphi$.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2. Квадратичная функция y = ax², a ≠ 0.
График — парабола, ветви которой направлены вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$.</td><td>
</td></tr>
</table>

3. ***Обратная пропорциональность*** $y=\frac{k}{x}$, $\boldsymbol{k \neq 0}$. График – гипербола, которая при $k>0$ расположена в I и III четвертях, а при $k<0$ — во II и IV четвертях.	
4. ***Функция*** $y=\sqrt{x}$. Определена на промежутке $[0; +\infty)$.	

Уравнения

Таблица 4

Тип уравнения	**Решение**
Линейное уравнение $\boldsymbol{ax=b}$	Если $a\neq 0$, то $x=\frac{b}{a}$.
	Если $a=0$, $b\neq 0$, то уравнение не имеет корней.
	Если $a=0$, $b=0$, то любое x является корнем уравнения.
Квадратное уравнение $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$, $\boldsymbol{a\neq 0}$, $D=b^2-4ac$ — его дискриминант	Если $D<0$, то уравнение не имеет корней. Если $D=0$, то уравнение имеет один корень $x=-\frac{b}{2a}$. Если $D>0$, то уравнение имеет два корня $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.
Неполное квадратное уравнение (один из коэффициентов b или c равен 0)	$ax^2+bx=0$ или $x(ax+b)=0$, поэтому $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$. $ax^2+c=0$ или $x^2=-\frac{c}{a}$. Если $-\frac{c}{a}>0$, то $x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Если $-\frac{c}{a}<0$, то уравнение не имеет корней.



§14. Основные соотношения между тригонометрическими функциями

В данном параграфе устанавливаются соотношения между тригонометрическими функциями, которые позволяют по значению одной из функций при определенных условиях находить значения всех остальных. Рассматриваются также формулы, сводящие вычисление значений тригонометрических функций в произвольной точке к вычислению их значений для аргумента из промежутка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Основное тригонометрическое тождество и следствия из него

Найдем связь между синусом и косинусом одного и того же аргумента. Пусть $P_t(x(t);\ y(t))$ — точка тригонометрической окружности, соответствующая числу t (рис. 294). Тогда, по определению синуса и косинуса, имеют место следующие равенства:

$$x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t.$$

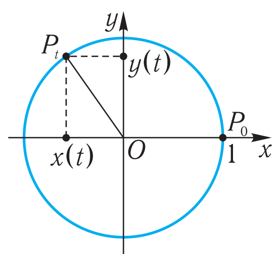


Рис. 294

Так как точка P_t лежит на тригонометрической окружности, то ее координаты удовлетворяют уравнению окружности $x^2 + y^2 = 1$. Поэтому для произвольного t выполняется равенство:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Это равенство называется ***основным тригонометрическим тождеством***.

К основным соотношениям между тригонометрическими функциями одного аргумента относят также равенства:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}\,;\ \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}\,.$$

Из приведенных выше равенств вытекают другие зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1, \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}, \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}.$$

Первое из этих соотношений является простым следствием определений тангенса и котангенса. Докажем второе. Имеем: $1 + \operatorname{tg}^2 t = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$. Третье соотношение доказывается аналогично. Рекомендуем сделать это самостоятельно.

! **Приведенные соотношения позволяют по значению одной из тригонометрических функций числа *t* вычислять квадраты значений других. Например, если $\cos t = \frac{1}{3}$, то $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Для нахождения самих значений нужна дополнительная информация, которая бы позволила установить их знаки.**

В предыдущем параграфе рассматривались примеры, где приходилось определять знаки значений тригонометрических функций, пользуясь их определениями. Обобщим эти рассуждения, установив, при каких значениях аргумента тригонометрические функции принимают положительные значения, а при каких — отрицательные.

Синус числа t — это ордината точки P_t (см. рис. 294). Положительными являются ординаты тех точек, которые расположены над осью абсцисс, то есть находящихся в первой или во второй четверти. Если точка P_t расположена под осью абсцисс, то есть в третьей или в четвертой четверти, то ее ордината отрицательна (рис. 295).

Свойство 1. **Синус числа *t* принимает положительные значения, если точка P_t находится в первой и второй четвертях, а отрицательные — если в третьей и четвертой.**

Далее рассуждаем аналогично. Косинус числа t — это абсцисса точки P_t. Положительными являются абсциссы тех точек, которые расположены правее оси ординат, то есть находящихся в первой

Знаки синуса

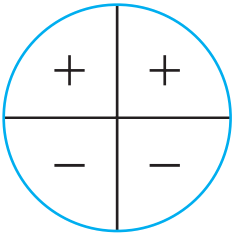


Рис. 295

Знаки косинуса

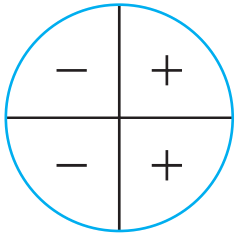


Рис. 296

Знаки тангенса и котангенса

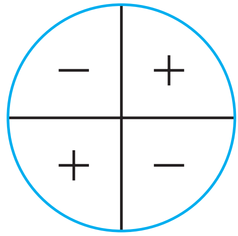


Рис. 297

или в четвертой четверти. Если точка P_t расположена левее оси ординат, то есть во второй или в третьей четверти, то ее абсцисса отрицательна (рис. 296).

Свойство 2. Косинус числа *t* принимает положительные значения, если точка P_t находится в первой и четвертой четвертях, а отрицательные — если во второй и третьей.

Согласно определению, $\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$, $\operatorname{ctg} t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$, поэтому tg t и ctg t принимают положительные значения, если sin t и cos t имеют одинаковые знаки. Соответственно, tg t и ctg t принимают отрицательные значения, если sin t и cos$t$ имеют различные знаки (рис. 297).

Свойство 3. Тангенс и котангенс числа *t* принимают положительные значения, если точка P_t находится в первой и третьей четвертях, а отрицательные — если во второй и четвертой.

Пример 1. Определить знаки чисел: 1) cos 230°; 2) $\sin\dfrac{7\pi}{9}$; 3) $\operatorname{tg}\dfrac{9\pi}{5}$.

□ 1) Определим, в какой четверти находится точка тригонометрической окружности, определяющая угол вращения 230°. Имеем: $180° < 230° < 270°$. Поэтому указанная точка лежит в третьей четверти. Косинус в третьей четверти принимает отрицательные значения. Поэтому $\cos 230° < 0$.

2) Определим сначала, в какой четверти находится точка тригонометрической окружности, соответствующая числу $\dfrac{7\pi}{9}$. По-

скольку $\frac{\pi}{2} < \frac{7\pi}{9} < \pi$, то числу $\frac{7\pi}{9}$ соответствует точка, находящаяся во второй четверти. Поэтому $\sin \frac{7\pi}{9} > 0$.

3) Поскольку $\frac{3\pi}{2} < \frac{9\pi}{5} < 2\pi$, то точка $P_{\frac{9\pi}{5}}$ расположена в четвертой четверти и $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{5} < 0$. ■

Ответ: 1) $\cos 230° < 0$; 2) $\sin \frac{7\pi}{9} > 0$; 3) $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{5} < 0$.

Пример 2. Известно, что $\cos t = -0,6$ и $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Найти $\sin t$, $\operatorname{tg} t$.

□ Из тождества $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ находим: $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - (-0,6)^2 = 0,64$. Поскольку $\frac{\pi}{2} < t < \pi$, то точка P_t расположена во второй четверти и $\sin t > 0$. Поэтому $\sin t = 0,8$; $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = -\frac{4}{3}$. ■

Ответ: $0,8$; $-\frac{4}{3}$.

Пример 3. Упростить выражение $\cos^2\alpha - (\operatorname{ctg}^2\alpha + 1)\sin^2\alpha$.

□ Применяя последовательно равенство $1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}$ и основное тригонометрическое тождество, будем иметь: $\cos^2\alpha - (\operatorname{ctg}^2\alpha + 1)\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \frac{1}{\sin^2\alpha}\cdot\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha$. ■

Ответ: $-\sin^2\alpha$.

При выполнении преобразований тригонометрических выражений, как и алгебраических, области их определения могут изменяться. Так, в примере 3 данное выражение определено при всех действительных значениях α, кроме $\alpha = \pi n$, $n \in Z$. Упрощённое выражение определено при всех действительных значениях α. Чтобы не усложнять запись, обычно договариваются, что равенство данного выражения и упрощенного, полученное с помощью преобразований, выполняется для всех значений переменных, при которых определены оба выражения.

Рассмотрим более сложные примеры на применение основных тригонометрических соотношений.

Пример 4. Определить знаки чисел: sin2; cos3; tg4; ctg5.

☐ Отметим на тригонометрической окружности точки P_2, P_3, P_4, P_5 (рис. 298). Учитывая, что sin 2 — это ордината точки P_2, приходим к выводу, что $\sin 2 > 0$. Поскольку cos 3 — это абсцисса точки P_3, то $\cos 3 < 0$. Знаки tg4 и ctg 5 определим, пользуясь определениями тангенса и котангенса: $\mathrm{tg}4 = \dfrac{\sin 4}{\cos 4} > 0$, так как $\sin 4 < 0$, $\cos 4 < 0$, $\mathrm{ctg}5 = \dfrac{\cos 5}{\sin 5} < 0$, ибо $\sin 5 < 0$, $\cos 5 > 0$. ■

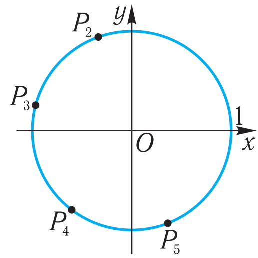


Рис. 298

Ответ: $\sin 2 > 0$; $\cos 3 < 0$; $\mathrm{tg}4 > 0$; $\mathrm{ctg}5 < 0$.

Пример 5. Доказать, что:

$$\sin^3\alpha(1-\mathrm{ctg}\alpha)-\cos^3\alpha(1-\mathrm{tg}\alpha)=\sin\alpha-\cos\alpha.$$

☐ Воспользовавшись определениями tgα и ctgα и основным тригонометрическим тождеством, получим:

$$\sin^3\alpha(1-\mathrm{ctg}\alpha)-\cos^3\alpha(1-\mathrm{tg}\alpha)=\sin^3\alpha\left(1-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)-\cos^3\alpha\left(1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=$$

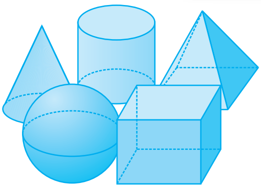
$$=\sin^3\alpha\left(\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)-\cos^3\alpha\left(\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=\sin^2\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)-$$

$$-\cos^2\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)=(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin\alpha-\cos\alpha.\ ■$$

Обратите внимание на то, что в примере 5 выражения, стоящие в левой и правой частях равенства, имеют различные области определения, но их значения на общей части областей определения совпадают.

✓ Контрольные вопросы

1°. Какому уравнению удовлетворяют координаты всех точек тригонометрической окружности?



Содержание

Учебное издание

АФАНАСЬЕВА Ольга Николаевна
БРОДСКИЙ Яков Соломонович
ПАВЛОВ Александр Леонидович
СЛИПЕНКО Анатолий Константинович

МАТЕМАТИКА
Учебник для 10 класса
Уровень стандарта

Главный редактор *Богдан Будный*
Редактор *Владимир Дячун*
Художник обложки *Владимир Басалыга*
Дизайн и компьютерная верстка *Андрея Кравчука*

Подписано к печати 16.10.2010. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Century Schoolbook. Печать офсетная.
Усл. печ. лист. 28,83. Усл. крас.-отп. 57,66.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК № 370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга — Богдан, а/с 529, м. Тернопіль 46008
тел./факс (0352) 52-06-07; 52-05-48; 52-19-66
publishing@budny.te.ua www.bohdan-books.com

ISBN 978-966-10-1703-9

9 789661 017039