1. Призма

На рисунку 1.1 зображено відомі вам просторові фігури. Кожна із цих фігур має скінченні розміри та складається з поверхні (межі фігури) та частини простору, обмеженої цією поверхнею.

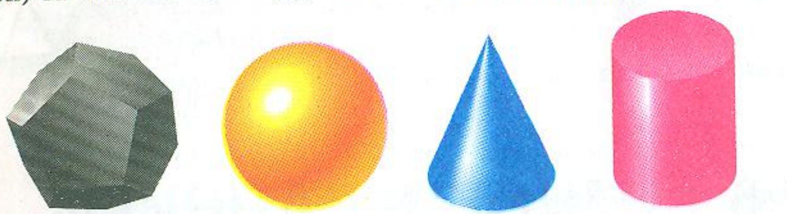
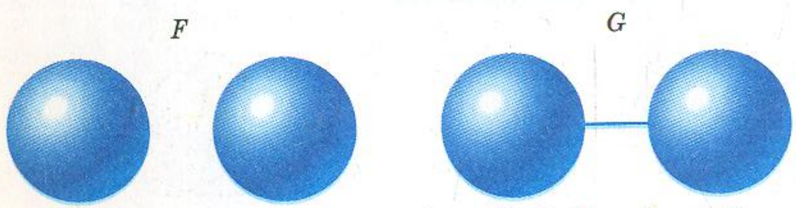


Рис. 1.1

Многогранник, кулю, конус, циліндр відносять до фігур, які називають **геометричними тілами** або просто **тілами**.

Не будь-яка фігура в просторі є тілом. Наприклад, пряма, площина, двогранний кут не є тілами. Ці фігури необмежені. Тіло ж — обмежена фігура. Проте й не кожна обмежена фігура є тілом. На рисунку 1.2 зображено приклади обмежених фігур F і G, які не є тілами. Строге означення тіла виходить за рамки розглядуваного курсу.



Фігура F — об'єднання двох куль

Фігура G — об'єднання двох куль і відрізка

Рис. 1.2

Докладніше про тіло ви зможете прочитати в оповіданні на с. 37–43.

Означення. Многогранником називають тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості многокутників.

Такі елементи многогранника, як грані, ребра та вершини, вам уже відомі.

Дві грані многогранника називають **сусідніми**, якщо вони мають спільне ребро. Наприклад, грані $A_1B_1C_1D_1$ і A_1B_1BA куба

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.3) є сусідніми, оскільки ребро A_1B_1 у них спільне.

Нехай точка M — вершина многогранника. Кут з вершиною M грані многогранника називають **плоским кутом многогранника при вершині** M. Наприклад, на рисунку 1.3 кут DAB є плоским кутом куба при вершині A.

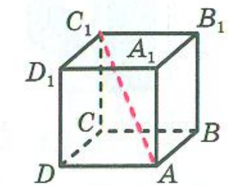


Рис. 1.3

Плоскі кути многогранника, що мають спільну вершину M, обмежують частину простору, яку називають **многогранним кутом** (рис. 1.4). Точку M називають **вершиною многогранного кута**. Промені MA_1, MA_2, MA_3, MA_4, MA_5 називають **ребрами многогранного кута**, а плоскі кути даного многогранника, що мають спільну вершину M, — **гранями многогранного кута**. Залежно від кількості граней многогранні кути називають тригранними, чотиригранними тощо. Наприклад, на рисунку 1.4 зображено п'ятигранний кут.

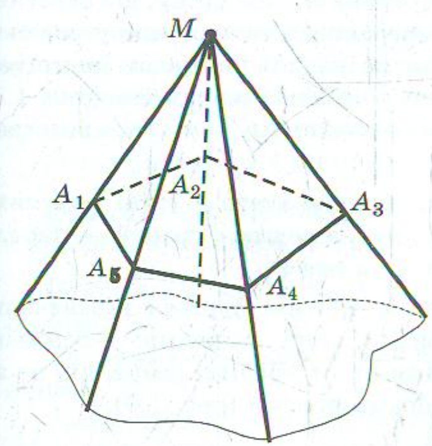


Рис. 1.4

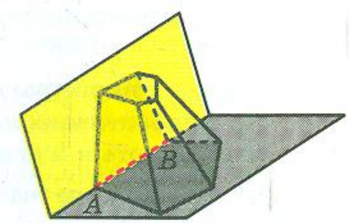


Рис. 1.5

Двогранним кутом многогранника при ребрі AB називають двогранний кут з ребром AB, грані якого містять сусідні грані многогранника, для яких ребро AB є спільним (рис. 1.5).

Відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані, називають **діагоналлю многогранника**. Наприклад, відрізок AC_1 — діагональ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.3).

Многогранники бувають опуклими та неопуклими.

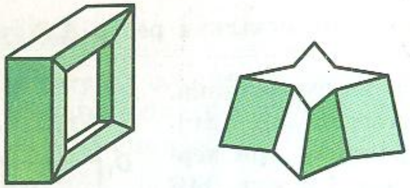


Рис. 1.6

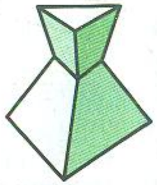


Рис. 1.7

Означення. Многогранник називають опуклим, якщо він розміщений по один бік від площини кожної його грані.

Куб і тетраедр — приклади опуклих многогранників. На рисунку 1.6 зображено неопуклі многогранники.

Усі грані опуклого многогранника є опуклими многокутниками. Проте навіть якщо кожна грань многогранника — опуклий многокутник, то цей многогранник не обов'язково є опуклим (рис. 1.7).

Площею поверхні многогранника називають суму площ усіх його граней.

Нехай у просторі задано многогранник і площину, що перетинаються. Якщо спільні точки многогранника та площини утворюють многокутник, то цей многокутник називають **перерізом многогранника** площиною, а саму площину — **січною площиною** (рис. 1.8).

Зупинимося докладніше на вже знайомому вам виді многогранника — призмі.

Означення. Многогранник, дві грані якого — рівні n-кутники, що лежать у паралельних площинах, а решта n граней — паралелограми, називають *n-кутною призмою*.

Нагадаємо, що паралелограми, про які йдеться в означенні, називають бічними гранями призми; рівні n-кутники — основами призми; сторони основ — ребрами основ призми; ребра, які не належать основам, — бічними ребрами призми (рис. 1.9).

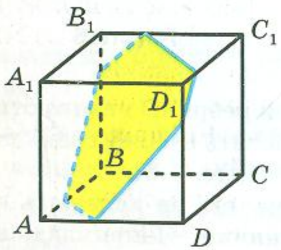


Рис. 1.8

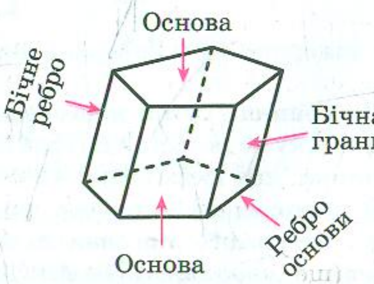


Рис. 1.9

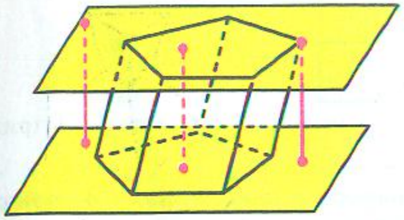


Рис. 1.10

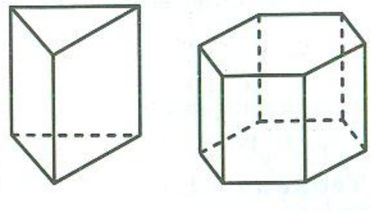


Рис. 1.11

Оскільки сусідні бічні грані призми — паралелограми, що мають спільну сторону — бічне ребро, то *всі бічні ребра призми є рівними та паралельними.*

Висотою призми називають перпендикуляр, опущений з якої-небудь точки площини однієї основи на площину другої основи (рис. 1.10). Довжина висоти призми дорівнює відстані між площинами її основ.

Означення. Призму називають прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площини основи.

Наприклад, прямокутний паралелепіпед є окремим видом прямої призми.

Кожне бічне ребро прямої призми є її висотою. Усі бічні грані прямої призми — прямокутники.

Якщо призма не є прямою, то її називають **похилою**.

Означення. Призму називають правильною, якщо вона є прямою, а її основа — правильний многокутник.

Наприклад, куб є окремим видом правильної чотирикутної призми.

На рисунку 1.11 зображено правильні трикутну та шестикутну призми.

Розглянемо опуклу n-кутну призму ($n > 3$). Переріз призми площиною, яка проходить через два бічних ребра, що не належать одній грані, перетинає основи призми по діагоналях (рис. 1.12). Такий переріз називають **діагональним перерізом призми**.

Діагональним перерізом будь-якої призми є паралелограм, а діагональним перерізом прямої призми — прямокутник (доведіть це самостійно).

Площею бічної поверхні призми називають суму площ усіх її бічних граней. **Площею поверхні призми** (ще говорять: **«площа повної поверхні призми»**) називають суму площ усіх її граней.

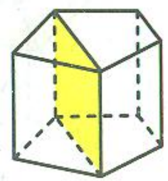


Рис. 1.12

Очевидно, що виконується така рівність:

$$\boxed{S_п = S_б + 2S_{осн},}$$

де $S_п$ — площа поверхні призми, $S_б$ — площа бічної поверхні призми, $S_{осн}$ — площа основи призми.

Теорема 1.1. ***Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи та бічного ребра призми.***

Доведення. Кожна бічна грань прямої призми — прямокутник, одна сторона якого — ребро основи, а друга — бічне ребро. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — довжини ребер основи призми, b — довжина бічного ребра. Тоді $S_б = a_1b + a_2b + \ldots + a_nb = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\, b$. Оскільки сума, записана в дужках, дорівнює периметру основи призми, то теорему доведено. ◄

Твердження теореми 1.1 зручно подати у вигляді однієї з формул:

$$\boxed{\begin{aligned} S_б &= P_{осн} \cdot b, \\ S_б &= P_{осн} \cdot h, \end{aligned}}$$

де $P_{осн}$ — периметр основи прямої призми, b — довжина бічного ребра, h — довжина висоти призми.

Задача. У похилій призмі проведено переріз, який перетинає всі бічні ребра призми та перпендикулярний до них. Доведіть, що площа бічної поверхні призми дорівнює добутку периметра перерізу та бічного ребра.

Розв'язання. Доведення проведемо для трикутної призми. Для інших n-кутних призм, де $n > 3$, доведення буде аналогічним.

Нехай трикутник MNP — переріз, про який ідеться в умові задачі (рис. 1.13). Доведемо, що $S_б = P_{MNP} \cdot AA_1$. Маємо: $AA_1 \perp MPN$. Отже, $AA_1 \perp MP$. Тоді відрізок MP — висота паралелограма AA_1B_1B.

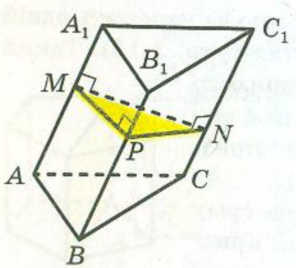


Рис. 1.13

Аналогічно можна довести, що відрізки PN і NM — відповідно висо́ти паралелограмів CC_1B_1B і CC_1A_1A.

Оскільки площа паралелограма дорівнює добутку висоти та сторони паралелограма, до якої проведено висоту, то можна записати:

$$S_б = MP \cdot AA_1 + PN \cdot BB_1 + NM \cdot CC_1.$$

Оскільки $AA_1 = BB_1 = CC_1$, то

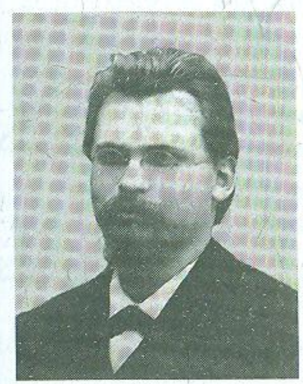
$$S_б = MP \cdot AA_1 + PN \cdot AA_1 + NM \cdot AA_1 = (MP + PN + NM) \cdot AA_1 = P_{MPN} \cdot AA_1.$$ ◄

Рис. 1.14

Зв'язок між многогранниками, вивченими в цьому пункті, ілюструє схема, зображена на рисунку 1.14.

Вивчаючи многогранники, неможливо не згадати прізвище видатного українського математика Георгія Феодосійовича Вороного. Досягнення Г. Ф. Вороного знайшли широке застосування практично в усіх природничих науках: фізиці, хімії, біології тощо. Наприклад, поліедри[1] Вороного—Діріхле (рис. 1.15) використовують для аналізу структури кристалів.

Рис. 1.15



Георгій Феодосійович Вороний
(1868–1908)

Народився в с. Журавка (нині Чернігівська область). Закінчив Петербурзький університет, був професором Варшавського університету. Г. Ф. Вороний зробив важливі відкриття в геометрії многогранників. Термін «діаграма Вороного» став настільки поширеним у дослідженнях у галузі геометричних алгоритмів, що деякі фахівці пов'язують народження обчислювальної геометрії саме із цим об'єктом.

[1] Поліедром називають об'єднання многогранників.

1. Що називають многогранником?
2. Які грані многогранника називають сусідніми?
3. Опишіть фігуру, яку називають многогранним кутом.
4. Що називають двогранним кутом многогранника?
5. Який многогранник називають опуклим?
6. Що називають призмою?
7. Що називають висотою призми?
8. Яку призму називають прямою? похилою?
9. Яку призму називають правильною?
10. Що називають діагональним перерізом призми?
11. Що називають площею поверхні призми? бічної поверхні призми?
12. Чому дорівнює площа бічної поверхні прямої призми?

ВПРАВИ

1.1.° Яку найменшу кількість граней може мати призма? Скільки ця призма має:
1) вершин; 2) ребер; 3) бічних ребер?

1.2.° Призма має 12 граней. Який многокутник лежить в її основі?

1.3.° У якій призмі бічні ребра паралельні її висоті?

1.4.° Доведіть твердження: якщо дві сусідні грані призми перпендикулярні до площини її основи, то дана призма є прямою. Чи буде дане твердження правильним, якщо з його формулювання вилучити слово «сусідні»?

1.5.° Чи є правильним твердження:
1) бічне ребро прямої призми перпендикулярне до будь-якої діагоналі її основи;
2) якщо всі ребра призми рівні, то вона є правильною;
3) якщо всі ребра прямої призми рівні, то вона є правильною?

1.6.° Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, один із кутів якої дорівнює 110° (рис. 1.16). Знайдіть двогранні кути при бічних ребрах призми.

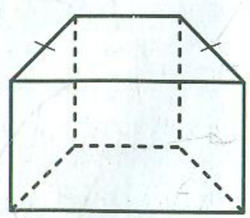


Рис. 1.16

1.7.° Доведіть, що в будь-якій призмі кількість вершин є парним числом, а кількість ребер — числом, кратним 3.

1.8.° Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 3 см, а висота — $3\sqrt{6}$ см. Знайдіть діагональ призми.

1.9.° Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 5 см, а діагональ бічної грані — 13 см. Знайдіть висоту призми.

1.10.° Точки D і E — середини ребер AC і BC правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 1.17). Площина, яка проходить через пряму DE та утворює з площиною ABC кут 30°, перетинає ребро CC_1 у точці F. Знайдіть площу утвореного перерізу призми, якщо сторона її основи дорівнює 12 см.

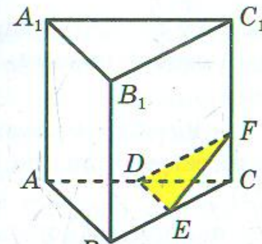


Рис. 1.17

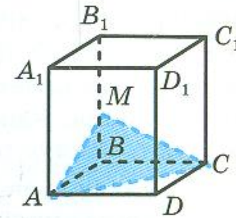


Рис. 1.18

1.11.° Через діагональ AC основи правильної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину, яка утворює з площиною ABC кут 45° і перетинає ребро BB_1 у точці M (рис. 1.18). Знайдіть площу утвореного перерізу призми, якщо сторона її основи дорівнює 8 см.

1.12.° Знайдіть площу бічної поверхні прямої призми, висота якої дорівнює 6 см, а основою є паралелограм зі сторонами 2 см і 3 см.

1.13.° Знайдіть сторону основи правильної семикутної призми, висота якої дорівнює 10 см, а площа бічної поверхні — 420 см².

1.14.° Знайдіть площу повної поверхні правильної чотирикутної призми, сторона основи якої дорівнює a, а висота дорівнює H.

1.15.° Знайдіть площу повної поверхні правильної трикутної призми, сторона основи якої дорівнює a, а висота дорівнює H.

1.16.° Кут між бічним ребром і площиною основи похилої призми дорівнює 30°, висота призми — 10 см. Знайдіть бічне ребро призми.

1.17.° У похилій чотирикутній призмі проведено переріз, який перетинає всі бічні ребра призми та перпендикулярний до них. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо даний переріз є ромбом зі стороною 5 см, а бічне ребро призми дорівнює 8 см.

1.18.° У похилій трикутній призмі проведено переріз, який перетинає всі бічні ребра призми та перпендикулярний до них. Знайдіть бічне ребро призми, якщо даний переріз є прямокутним трикутником з катетами 9 см і 12 см, а площа бічної поверхні призми дорівнює 288 см^2.

1.19.° Точка $C_1(2; -3; 4)$ — вершина призми $ABCA_1B_1C_1$, основа ABC якої належить площині $z = 7$. Запишіть рівняння площини, якій належить основа $A_1B_1C_1$.

1.20.° Точка $A(4; -1; 6)$ — вершина призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основа $A_1B_1C_1D_1$ якої належить площині $x = 0$. Запишіть рівняння площини $ABCD$.

1.21.• Основа призми належить площині $2x + y - z - 7 = 0$. Запишіть рівняння площини, якій належить друга основа призми, якщо в цій площині лежить точка $X(1; 5; -3)$.

1.22.• Основа призми належить площині $-x + 3y + 2z = 0$. Запишіть рівняння площини, якій належить друга основа призми, якщо в цій площині лежить точка $M(6; -3; 1)$.

1.23.• Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює a, а кут між діагоналлю призми та бічною гранню становить 30°. Знайдіть:

1) висоту призми;
2) кут між діагоналлю призми та площиною основи.

1.24.• Знайдіть діагоналі правильної шестикутної призми, кожне ребро якої дорівнює a.

1.25.• Основа прямої призми — ромб зі стороною a та гострим кутом α. Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут β. Знайдіть діагоналі призми.

1.26.• Основою прямої призми, діагоналі якої дорівнюють 10 см і 16 см, є ромб. Знайдіть сторону основи призми, якщо її висота дорівнює 4 см.

1.27.• Прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90°$) є основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$. Через пряму CC_1 проведено площину, яка перпендикулярна до прямої AB і перетинає ребро AB у точці D. Знайдіть площу утвореного перерізу призми, якщо $AD = 18$ см, $BD = 2$ см, а висота призми дорівнює 8 см.

1.28.• Прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90°$) є основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$, відрізок CM — медіана трикутника ABC. Висота призми дорівнює гіпотенузі її основи. Знайдіть площу перерізу призми площиною, яка проходить через прямі CC_1 і CM, якщо $AC = 30$ см, $BC = 40$ см.

1.29.• Кожне ребро правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює a. Знайдіть:

1) площу перерізу призми, який проходить через точки A, B і C_1;
2) кут між площиною даного перерізу та площиною основи призми.

1.30.• Прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90°$) є основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$. Площина, яка проходить через пряму AC, утворює з площиною основи призми кут β і перетинає ребро BB_1 у точці D. Знайдіть площу утвореного перерізу, якщо $\angle BAC = \alpha$, $BD = a$.

1.31.• Основою прямої призми є ромб з гострим кутом α, більша діагональ ромба дорівнює d. Через меншу діагональ нижньої основи та вершину гострого кута верхньої основи провели площину, яка утворює з площиною нижньої основи призми кут β. Знайдіть:

1) висоту призми;
2) площу утвореного перерізу призми.

1.32.• Сторона основи правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює 2 см, а бічне ребро — 6 см. Діагоналі бічної грані AA_1B_1B перетинаються в точці D. Знайдіть кут між прямою CD і площиною ABC.

1.33.• Сторона основи правильної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 1 см, а бічне ребро — $\sqrt{5}$ см. Діагоналі бічної грані CC_1D_1D перетинаються в точці M. Знайдіть кут між прямою AM і площиною ABC.

1.34.• Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 5 см, 12 см і 13 см, а площа повної поверхні — 270 см^2. Знайдіть висоту призми.

1.35.• Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює 96 см^2, а площа повної поверхні — 128 см^2. Знайдіть висоту призми.

1.36.• Обчисліть площу повної поверхні правильної чотирикутної призми, діагональ якої дорівнює 12 см і нахилена до площини основи під кутом 30°.

1.37.• Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної призми дорівнює S. Чому дорівнює площа бічної поверхні призми?

1.38.• Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 5 см, а діагональ бічної грані — 4 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.