ГОТУЄМОСЯ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ТУРНІРІВ

# МАТЕМАТИЧНИЙ КОНКУРС 4–9 КЛАСИ

**Посібник для підготовки до математичних турнірів**

**Випуск 8**

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

УДК 519.11
ББК 74.262 я72
М66

Серію «Готуємося до математичних турнірів» засновано 2009 року

М66 Математичний конкурс. 4–9 класи : Посібник для підготовки до математичних турнірів. Випуск 8 / [упоряд.: Павлов О. Л., Бродський Я. С.]. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2013. — 80 с. (Серія «Готуємося до математичних турнірів»).

ISBN 978-966-10-3426-5

У посібнику представлені тексти завдань конкурсу «Золотий ключик», що проводився Центром математичної і комп'ютерної освіти МІОТ разом з відкритим математичним коледжем при Донецькому національному університеті в 2012 році. У ньому також містяться розв'язки і відповіді до всіх завдань.

Посібник призначений для підготовки школярів 4–9 класів до математичних олімпіад, конкурсів, зокрема до конкурсів «Золотий ключик», «Кенгуру». Може бути використаний вчителями шкіл, ліцеїв, гімназій для проведення математичних змагань у навчальних закладах.

**УДК 519.11**
**ББК 74.262 я72**



ISBN 978-966-10-0742-9 (серія)
ISBN 978-966-10-3426-5



# Передмова

Хто з нас не любить змагатись? Відчути радість перемоги, спіймати захоплені погляди однокласників, почути стриману, але від цього ще більш бажану, похвалу дорослих, побачити радість і гордість в очах батьків — хіба не варто заради цього брати участь у змаганнях і намагатися перемогти! Будь-хто може знайти для себе сферу діяльності — спорт, музику, танці тощо, — де кожен у відповідності до своїх уподобань, можливостей, схильностей, здібностей може стати кращим, зможе перемогти.

Серед усіх різноманітних змагань для школярів особливої уваги заслуговують конкурси і змагання з різних предметів. Насамперед, вони загальнодоступні, зацікавлюють учнів до навчальних дисциплін і відповідних розділів науки, природознавства, техніки, а це допомагає сформувати вибір майбутньої професії. І, що вкрай важливо, в таких конкурсах не буває тих, хто зазнає поразки. Адже, якщо навіть учасник змагань не став переможцем або призером, він переміг себе — свою інертність, лінощі, байдужість, отримав безцінний для становлення особистості досвід, набув нових знань.

Окрім традиційних шкільних олімпіад різного рівня, в останні роки стають популярними математичні конкурси, які відрізняються від олімпіад змістом та умовами проведення. Вони відкриті для всіх охочих, а незвичність завдань, їх цікавість робить ці конкурси численними.

Одним з таких нетрадиційних змагань є математичний конкурс «Золотий ключик». Його проводить, починаючи з 1997 року, Центр математичної і комп'ютерної освіти МІОТ разом з відкритим математичним коледжем (ВМК) Донецького національного університету. В ньому беруть участь учні 4–9 класів. Спочатку його проводили для учнів Донецької області, згодом ці межі розширили, і його учасниками стали учні практично з усіх областей України.

Конкурс «Золотий ключик» є відкритим. Кожен учень 4–9 класів може взяти в ньому участь. Конкурс складається із заочного й очного турів. Заочний тур починається взимку і триває два місяці. Очний тур зазвичай проходить у березні і є одночасно репетицією до Міжнародного математичного конкурсу — «Кенгуру», що в Україні проводиться з 1997 року.

Завдання конкурсу складаються з двох частин. Розв'язок завдань першої частини зводиться до вибору правильної відповіді з декількох запропонованих. Серед наведених відповідей тільки одна є правильною. Друга частина завдань складається із «звичайних» задач, хоча більшість з них нестандартні. Їхній розв'язок оформляється за звичними для шкіл правилами, тобто з усіма необхідними поясненнями й обґрунтуваннями.

Головною привабливістю конкурсу є його завдання. Вони різноманітні за складністю і змістом. Більшість з них не вимагають спеціальної підготовки, а розраховані на кмітливість та ініціативу при їх розв'язанні. На думку багатьох учасників, конкурс приносить задоволення від розв'язання цікавих і нестандартних задач, підсилює інтерес до математики, підвищує рівень їхньої математичної підготовки.

Упорядники посібника намагалися, щоб певна кількість завдань була приділена практичному застосуванню математики. Слід також зазначити, що значна кількість завдань не є оригінальною, вона запозичена з таких періодичних видань, як «Квант», «Математика», «Математика в школі», «У світі математики», а також з іншої літератури «олімпіадної» тематики, й адаптована для конкурсу.

У даному посібнику наведено завдання заочного й очного турів конкурсу "Золотий ключик" за 2012 рік. Тексти завдань за 1997–2004 роки містяться у посібнику «Математичний конкурс «Золотий ключик». — Львів: Каменяр, 2004». Тексти завдань з розв'язками за 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010 і 2011 роки надруковано у перших семи випусках «Математичний конкурс. 4–9 класи», що вийшли в серії «Готуємося до математичних турнірів».

Посібник призначено для учнів 4–9 класів, а також для вчителів математики. Школярі зможуть використати посібник для підготовки до математичних олімпіад і конкурсів, зокрема до конкурсів «Золотий ключик» і «Кенгуру». Вчителі математики зможуть скористатися посібником для проведення математичних змагань у навчальних закладах, для організації позакласної роботи з математики.

У посібнику наведено відповіді, вказівки та розв'язки задач. Упорядники сподіваються, що робота з посібником буде корисною і цікавою як для учнів, так і для вчителів.

Усі зауваження і побажання просимо надсилати за адресою: alex4909@gmail.com.

# Завдання заочного туру конкурсу

## 4–5 класи

### Перша частина завдань

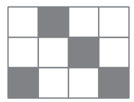
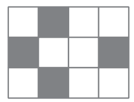
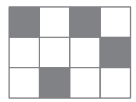
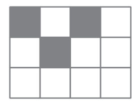
**1.** Наповнена доверху водою посудина важить 5 кг, а наповнена наполовину — 3 кг 250 г. Скільки води вміщає посудина?

| А | Б | В | Г |
|---|---|---|---|
| 3 кг | 3 кг 500 г | 3 кг 750 г | 4 кг |

**2.** Дмитро склав квадратний аркуш паперу навпіл, потім ще раз і ще раз. У центрі фігури, що утворилася, він зробив отвір, а потім знову розгорнув аркуш. Скільки отворів хлопчик побачив?

| А | Б | В | Г |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 8 | 16 |

**3.** У Гаррі Поттера є чарівні окуляри, в яких він бачить все чорне — білим, а все біле — чорним. Гаррі подивився через ці окуляри на прямокутник, зображений справа. Що він побачив?

| А | Б | В | Г |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |

**4.** На прямій позначили декілька точок. Потім відмітили середини відрізків, що сполучають сусідні точки. Всього позначеними виявилися 137 точок. Скільки точок позначили спочатку?

| А | Б | В | Г |
|---|---|---|---|
| 69 | 68 | 67 | 63 |

**5.** Літерами А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, І позначені цифри від 1 до 9. Кожна літера позначає одну цифру і кожна цифра позначена однією

**9.** Для розв’язання задачі зручно скласти таку таблицю.

| | Вода | Молоко | Лимонад | Квас |
|---|---|---|---|---|
| Пляшка | – | – | | |
| Склянка | | – | | |
| Глечик | | | – | – |
| Банка | – | – | – | |

Оскільки вода і молоко не в пляшці, то ставимо прочерки у відповідних рядку і стовпцях. Посудина з лимонадом знаходиться між глечиком і посудиною з квасом, то лимонад і квас не можуть бути в глечику. Відзначаємо це в таблиці (у третьому рядку і двох останніх стовпцях ставимо прочерки). Оскільки в банці не лимонад і не вода, то прочерки ставимо в четвертому рядку, в першому і третьому стовпцях. Склянка знаходиться біля банки і посудини з молоком, то молоко не в склянці і не в банці (відзначаємо це в таблиці).

| | Вода | Молоко | Лимонад | Квас |
|---|---|---|---|---|
| Пляшка | - | - | + | - |
| Склянка | + | - | - | - |
| Глечик | - | + | - | - |
| Банка | - | - | - | + |

Тоді виходить, що молоко в глечику. Тому в глечику не може бути вода. Вода може бути тільки в склянці. У склянці не можуть бути лимонад і квас. Лимонад — у пляшці, а квас — у банці.■

**10.** Петрик міг здати 6 півлітрових пляшок, отримати 90 к. Якщо хлопчик на них купить молоко (4 л), то в нього ще залишиться порожній посуд. Тому він може здати ще одну літрову пляшку за 20 к., у нього буде 1 крб 10 к., за які він купить 5 л молока і понесе його додому в п’яти літрових пляшках.■



# 6–7 класи

## Перша частина завдань

### Відповіді

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| В | В | Г | Б | А | Б | А | Б | В | В | А | Г | Б | Г | В |

### Розв’язки

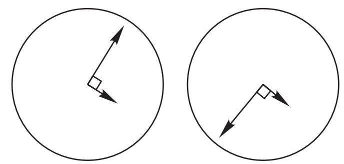
**1.** Відповідь безпосередньо випливає з умови: один внесок у перший банк становив 60% від сумарного внеску. Отже, внесок у другий банк — 40%.■

**Відповідь: В.** 40%.

**2.** І велике, і маленьке колесо велосипеда проїхали один і той самий шлях. За один оберт кожне колесо проходить шлях, що дорівнює довжині кола цього колеса. Довжина кола пропорційна до його діаметра. Оскільки діаметр маленького колеса втричі менший від великого, а шлях воно проїде той самий, що і велике колесо, то воно зробить на цьому шляху втричі більше обертів порівняно з великим, тобто 300 обертів.■

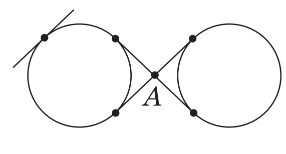
**Відповідь: В.** 300.

**3.** При кожному обгоні годинної стрілки хвилинною кут між ними буде прямим двічі: в моменти, коли хвилинна стрілка наближається до годинної і коли віддаляється від неї (див. рис.). За 12 годин хвилинна стрілка пережене годинну 11 разів, оскільки за цей час вона зробить 12 обертів, а годинна — 1 оберт. За добу кількість обгонів дорівнює 22, а шукане число — 44.■



**Відповідь: Г.** Інша відповідь.

**4.** Вказану в умові властивість має точка перетину $A$ спільних внутрішніх дотичних до даних кіл (див. рис.). Через будь-яку іншу точку поза цими кругами можна провести дотичну до



Твердження **В** не випливає з умови, оскільки всі студенти, що працюють у вільний час, можуть бути іногородніми, адже вони становлять 60% від кількості студентів.

Твердження **Г** випливає з умови, оскільки 45% студентів у вільний час працюють, а не іногородніх серед студентів тільки 40%. Отже, є іногородні студенти, що працюють у вільний час. ■

**Відповідь: Г.**

**8.** Нехай спочатку було $k$ автобусів, а після від'їзду одного автобуса в ті, що залишилися, розсаджували по $n$ чоловік. За умовою, $k \geq 2$, $n \leq 32$. Кількість туристів дорівнює $22k + 1$. Після того, як поламався один автобус, в ті, що залишилися, посадили $n(k - 1)$ туристів. Тому $22k + 1 = n(k - 1)$. Звідси,

$$n = \frac{22k+1}{k-1} = \frac{22(k-1)+22+1}{k-1} = 22 + \frac{23}{k-1}.$$

Оскільки $n$ — натуральне число, то число $\frac{23}{k-1}$ має бути цілим. Але 23 — просте число. Отже, або $k - 1 = 1$, або $k - 1 = 23$. Якщо $k = 2$, то $n = 45$, що суперечить умові. Якщо ж $k = 24$, то $n = 23$. Це задовольняє умову задачі. Отже, кількість туристів у групі дорівнює $n(k - 1) = 23 \cdot 23 = 529$. ■

**Відповідь: В.** 529.

**9.** Позначимо через $x$, $y$ $z$ ціни одного метра в гривнях відповідно першого, другого і третього видів тканини. Тоді, за умовою, маємо дві рівності: $14x + 5y + 9z = 1600$, $4x + 13y + 9z = 1280$. Віднімаючи з першої рівності другу, отримаємо: $10x - 8y = 320$, або $5x - 4y = 160$.

Оскільки, за умовою, $x$ і $y$ — цілі числа, то з останньої рівності випливає, що $5x$, а тому і $x$, ділиться на 4. З першої рівності випливає, що $14x < 1600$, або $x < 115$. Якщо $x = 112$, то $y = 100$. Оскільки $5x < 160$, то $x > 32$. Якщо $x = 36$, то $y = 5$. В обох розглянутих випадках тканина першого виду дорожча від тканини другого виду. Користуючись лінійністю зв'язку $x$ і $y$ неважко впевнитись, що для всіх допустимих значень (40, ..., 108) значення $y$ буде меншим. ■

**Відповідь: А.** Першого.

**10.** Позначимо через $x$, $y$, $z$ кількість книг, які можна розмістити відповідно на верхній, середній і нижній полицях. За умовою, $x + y + z = 100$, $25 \leq x \leq 40$, $30 \leq y \leq 40$, $30 \leq z \leq 40$. Значення $z$ однозначно визначається, якщо відомі $x$ і $y$: $z = 100 - (x + y)$. До того ж третя нерівність з умови набуває вигляду: $60 \leq x + y \leq 70$. Отже, потрібно знайти кількість розв'язків системи нерівностей: $60 \leq x + y \leq 70$, $25 \leq x \leq 40$, $30 \leq y \leq 40$.

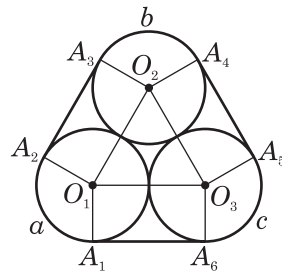


Розглядаючи цілі допустимі значення $y$, знайдемо значення $x$, що задовольняє дві нерівності. Наприклад, якщо $y = 30$, то $x$ задовольняє систему нерівностей $\begin{cases} 60 \leq x + 30 \leq 70, \\ 25 \leq x \leq 40, \end{cases}$ або $\begin{cases} 30 \leq x \leq 40, \\ 25 \leq x \leq 40, \end{cases}$ або $30 \leq x \leq 40$.

Отже, при $y = 30$ існує 11 цілих значень $x$, що задовольняють систему нерівностей.

І взагалі, при кожному $y \in [30; 35]$ дана система має 11 розв'язків $(x; y)$, де $x \in [60 - y; 70 - y]$. При будь-якому $y \in \{36; 37; 38; 39; 40\}$ вона має розв'язки $(x; y)$, де $x \in [25; 70 - y]$. Загальна кількість розв'язків системи, а отже, і відповідь на завдання дорівнює $66 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 106$. ■

**Відповідь: Б.** 106.




**11.** З умови випливає, що довжина металевої стрічки дорівнює довжині кривої, що проходить через точки $A_1, A_2, ..., A_6$ і складається з трьох рівних відрізків $A_2A_3$, $A_4A_5$, $A_6A_1$ і трьох рівних дуг $\overset{\frown}{A_1aA_2}$, $\overset{\frown}{A_3bA_4}$, $\overset{\frown}{A_5cA_6}$ (див. рис.).

Рівність відрізків випливає з умов дотику кіл і дотику відрізків з колами: $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1$, $A_2A_3 = O_1O_2$, $A_4A_5 = O_2O_3$, $A_6A_1 = O_3O_1$, оскільки $O_1A_2 \perp O_1O_2$, $O_2A_3 \perp O_1O_2$, ..., $O_3A_6 \perp O_1O_3$, $O_1A_2 = O_2A_3 = ... = O_3A_6$. З наведеної рівності випливає, що довжина кожного з вказаних відрізків дорівнює діаметру труби, тобто дорівнює 1 м.

Рівність дуг випливає з того, що трикутник $O_1O_2O_3$ — рівносторонній, а сторони кутів $A_1O_1A_2$, $A_3O_2A_4$, $A_5O_3A_6$ відповідно перпендикулярні до сторін кутів трикутника. Оскільки ці кути тупі, то кожен з них у сумі з кутом трикутника дорівнює 180°. Отже, ці кути дорівнюють по 120°. Тоді сума довжин відповідних дуг дорівнює довжині кола з радіусом 0,5 м. Тому вона дорівнює $\pi$ м, а шукана довжина стрічки дорівнює $1 + \pi \approx 4{,}1$ (м). ■

**12.** Розглянемо квадрат зі стороною $a = 10(\sqrt{2} - 1)$ (див. рис. 1). Нехай $MC = a$, а $MK \perp AC$. Оскільки $a$ більше від половини діагоналі

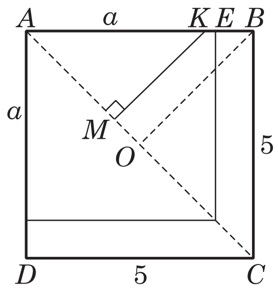



**Рис. 1**

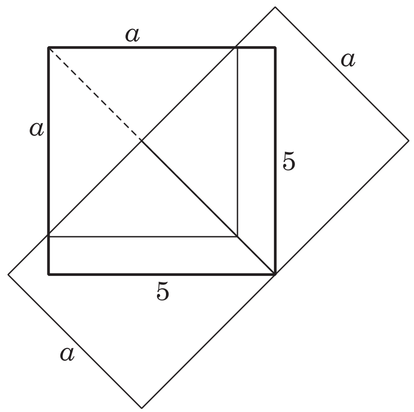



**Рис. 2**

квадрата $ABCD$, $\left(10\left(\sqrt{2}-1\right) > 2{,}5\sqrt{2}\right)$, то досить показати, що $AK \le a$. Трикутник $AMK$ — прямокутний і рівнобедрений. Тому

$$AK^2 = 2AM^2 = 2(AC - MC)^2 = 2\left(5\sqrt{2} - 10\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^2 = 2\left(10 - 5\sqrt{2}\right)^2,$$

$$AK = \sqrt{2}\left(10 - 5\sqrt{2}\right) = 10\left(\sqrt{2}-1\right) = a.$$

Шукане покриття зображено на рис. 2.■

**13.** Не можна. Наведемо приклад. Позначимо фасони цифрами 1, 2, 3, а кольори — літерами *к* (коричневий), *ч* (чорний), *с* (синій). Нехай в магазин привезли чотири костюми: 1*к*, 2*к*, 3*ч*, 3*с*. Тут представлено три фасони і три кольори. Проте жодні три з них не представляють всі фасони і всі кольори. У цьому можна переконатися, перебравши всі варіанти трійок костюмів: (1*к*, 2*к*, 3*ч*), (1*к*, 2*к*, 3*с*), (1*к*, 3*ч*, 3*с*), (2*к*, 3*ч*, 3*с*).■

**14.** Розглянемо різні варіанти вибору упаковок і відповідну до них кількість книг.

*Кількість упаковок*

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| по 5 книг | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 6 | 5 |
| по 8 книг | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 |
| К-ть книг | 5 | 8 | 10 | 13 | 16 | 15 | 18 | 21 | 24 | 20 | 23 | 26 | 29 | 32 | 25 | 28 | 31 | 34 | 37 | 40 | 30 | 33 |



Проаналізувавши останній рядок таблиці, робимо висновок, що неможливо видати цілими упаковками такі кількості книг: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 17, 19, 22, 27.

Якщо продовжити розгляд варіантів, то можна переконатися, що всі кількості книг, більші від 27, з'являються на якомусь кроці. Це дає підставу висловити гіпотезу про те, що будь-яке число, більше від 27, можна подати у вигляді $5x + 8y$, де $x$ і $y$ — цілі невід'ємні числа. Справедливість цієї гіпотези випливає з того, що п'ять послідовних чисел — 28, 29, 30, 31, 32 — можна представити у вказаному вигляді (це видно з таблиці). Додаючи до них числа виду $5k$, $k = 1, 2, \ldots$, отримуємо будь-яке натуральне число, більше від 32. Отже, будь-яке число, більше від 32, можна подати у вигляді $5x + 8y$.■

## Зміст



---

*Навчальне видання*

Готуємося до математичних турнірів

Упорядники:
ПАВЛОВ Олександр Леонідович,
БРОДСЬКИЙ Яків Соломонович

**МАТЕМАТИЧНИЙ КОНКУРС. 4–9 КЛАСИ**
**Посібник для підготовки до математичних турнірів**
**Випуск 8**

Підписано до друку 19.04.2013. Формат 60х84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 4,65. Умовн. фарбо-відб. 4,65.

[В. 1].

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 4221 від 07.12.2011 р.

Навчальна книга – Богдан, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46002
Навчальна книга – Богдан, а/с 529, м. Тернопіль, 46008
тел./факс (0352)52-06-07; 52-19-66; 52-05-48
office@bohdan-books.com www.bohdan-books.com

**ISBN 978-966-10-3426-5**

9 789661 034265