

Григорій Возняк  
Ольга Возняк

# МАГІЧНІ ФІГУРИ ТА ЧИСЛА

5 – 6 КЛАСИ



ТЕРНОПІЛЬ  
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

УДК 74.262.21  
ББК 22.1я72  
В53

Рецензенти:

старший викладач кафедри математики,  
фізики та інформатики Кременецького  
гуманітарно-педагогічного інституту ім. Тараса Шевченка  
*Скакальська М.С.*  
методист Бродівського районного відділу освіти  
Львівської області  
*Гула Р.Г.*

**Возняк Г., Возняк О.**

В53 Магічні фігури та числа. 5–6 класи. —  
Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. — 80 с.

**ISBN 978-966-10-1384-0**

Посібник містить завдання, пов'язані з розв'язуванням магічних квадратів, складанням цікавих трикутників, з іграми в доміно тощо.

Такі завдання та їхнє розв'язування сприяють формуванню в учнів уявлень про поняття і методи математики, а також поглибленню програмного матеріалу, розвитку логічного мислення і просторової уяви.

Для учнів та вчителів загальноосвітніх шкіл, ліцеїв, гімназій.

ББК 22.1я72

## ПЕРЕДМОВА

У посібнику поміщені завдання, які сприяють формуванню в учнів уявлень про деякі поняття і методи математики, а також поглибленню програмного матеріалу, розвитку логічного мислення і просторової уяви. Цей матеріал має пізнавальне значення, сприяючи виробленню в учнів таких важливих якостей, як спостереження, уміння зіставляти й порівнювати факти, робити узагальнення, озброює учнів навичками розумової діяльності, прийомами мислення, зокрема такими, як аналогія, виділення головного.

Вправи, вміщені в посібнику, стимулюють розвиток і зміцнення учнівських зацікавлень. Елемент несподіваності і новизни завжди привертає увагу учнів, і вони з інтересом слухають розповіді учителя, працюють з великим емоційним піднесенням. Здивовані учні наперебій запитують учителя, як йому так швидко вдається зробити обчислення, їх цікавить, як вчитель «відгадує» здобутий результат.

В основу цих завдань покладено принцип, за яким дитячий словниковий багаж збагачується новими математичними термінами природним шляхом.

Задачі згруповано за певними ідеями і методами розв'язування, у кожному параграфі вони подаються в порядку зростання складності.

Перш ніж розпочинати з учнями розв'язування завдань певної групи, потрібно ознайомитися з методичними прийомами, які подані в посібнику.

ISBN 978-966-10-1384-0

© Навчальна книга – Богдан,  
майнові права, 2011

# ВСТУП

## Фігурні числа

У будівництві споруд давнини — пірамід, палаців, храмів — використовувалися плити та цегла, гранями яких були трикутники, чотирикутники, квадрати і деякі інші фігури. З цими фігурами людина зустрічалася і при вимірюванні земельних ділянок. Ознайомлюючись з різними геометричними фігурами, люди стали помічати їхні загальні властивості. Так поступово почала створюватися геометрія — наука про фігури. Геометрія досягла великого розвитку в Стародавній Греції у школі Піфагора (VI – V ст. до н.е.).

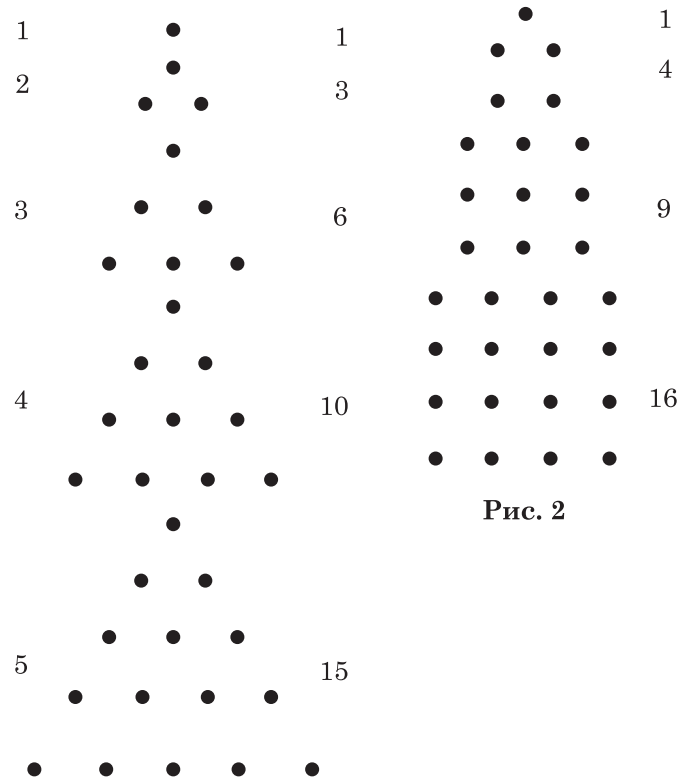


Рис. 1

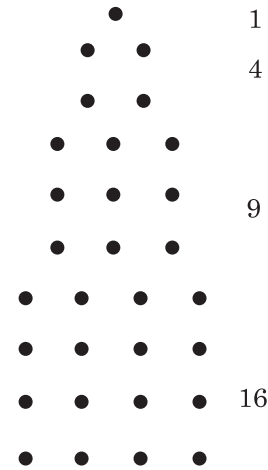


Рис. 2

Піфагор і його учні розвивали не тільки геометрію, але й арифметику, причому їхнє вчення про числа тісно перепліталось із вченням про геометричні фігури. Піфагорійці складали з камінців різні фігури, зображали числа у вигляді точок, групуючи в геометричні фігури (рис. 1 і 2).

Таке зображення чисел полегшувало піфагорійцям вивчати властивості чисел. Числа, які зображались за допомогою геометричних фігур, отримали назву «фігурні числа». Фігурні числа зустрічались не тільки в піфагорійців, але й у інших грецьких учених: Ератосфена (276 – 194 рр. до н.е.), Нікомаха (I ст.), Діофанта (III ст.). Фігурними числами займалися також індійські математики.

Найпростішими із фігурних чисел є т. зв. трикутні числа: 1; 3; 6; 10; 15; 21; ...

На рис. 3, а)–г) ці числа зображені точками на сторонах трикутника.

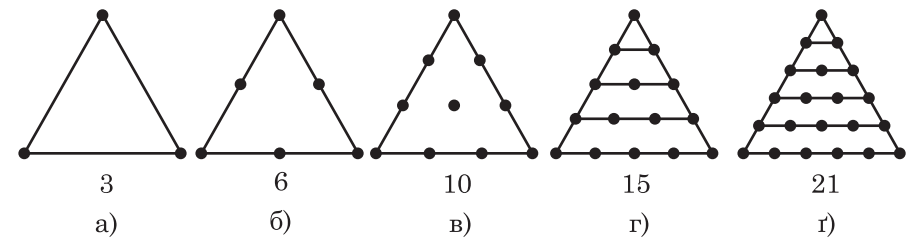


Рис. 3

Послідовність трикутних чисел можна легко скласти наступним чином із натуральних чисел:

1;	2;	3;	4;	5;	6;
1;	3;	6;	10;	15;	21; ...
	↓	↓	↓		
	1+2	1+2+3	1+2+3+4		

Квадратними числами називають числа:

1;	4;	9;	16; ...
1	2 · 2	3 · 3	4 · 4; ...;

тобто квадрати натуральних чисел: 1; 2; 3; ...

На рис. 4 кількість точок зображає число одиничних квадратів, які містяться в інших квадратах, і відповідає площам квадратів.

В одному із стародавніх рукописів II ст. до н.е. поміщена фігура, зображена на рис. 5.

	1	2	3	4
1	•	•	•	•
2	•	•	•	•
3	•	•	•	•
4	•	•	•	•

Рис. 4

Це стародавня геометрична фігура, яку називають логічний (чарівний) квадрат. Цей квадрат у сучасному вигляді зображено на рис. 6. Як бачимо, в цьому квадраті записано перших дев'ять натуральних чисел, які розміщені так, що сума чисел у кожному з рядків, стовпців і у кожній із діагоналей однакова (15). В іншому логічному квадраті (I ст. н.е.) сума чисел дорівнює 34 (рис.7).

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Рис. 6

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Рис. 7

Крім цього, можна помітити, що сума куткових чисел ( $1 + 4 + 16 + 13$ ) також дорівнює 34. В далекому минулому люди вважали ці числа таємничими (чарівними).

Про такі числа та геометричні фігури, про їхнє складання і розв'язування будемо говорити у цій книжці.

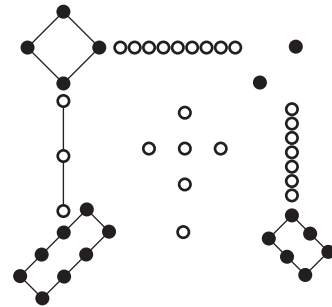


Рис. 5

## 1. МАГІЧНІ КВАДРАТИ

Питання про активність учнів у процесі навчання є корінним питанням методики викладання математики. Викладання повинно бути організоване так, щоб використовувані методи навчання максимально сприяли пробудженню в учнів інтересу до занять і активізували їхню пізнавальну діяльність.

У свою чергу, активність та інтерес до занять мають бути використані як засіб засвоєння учнями певної суми знань, умінь і навичок, а також як шлях до досягнення загального математичного розвитку учнів.

Часто доводиться помічати, що на уроках математики в 5–6 класах учні неохоче, без цікавості розв'язують вправи на всі дії над цілими або дробовими числами. Одним із засобів активізації мислення учнів при вивченні математики є розв'язування цікавих завдань за їхнім змістом. Це завдання, зокрема, може бути здійснене шляхом заповнення порожніх клітинок, магічних квадратів тощо.

### 1.1.Методика розв'язування магічних квадратів

Наведемо конкретні приклади.

1. Розглянь квадрат на рис. 8, а). Визначивши закономірність утворення чисел у квадраті, заповни за тією самою закономірністю числами порожні клітинки квадратів, зображених на рис. 8, б)–г). Чим цікавий цей квадрат?

Троє учнів, які першими виконали завдання, заповнюють порожні клітинки квадратів, нарисованих на дошці (рис.8).

Закономірність розміщення чисел у кожному квадраті на рис. 8, а) полягає в тому, що сума чисел у кожному рядку, стовпчику і по діагоналях дорівнює одному і тому самому числу 150.

40	30	80	80		60	40		20	20		40
90	50	10		50				70		50	
20	70	60	40		20			60	60		

а)

б)

в)

г)

Рис. 8

Заповнені квадрати (б, в, г) матимуть такий вигляд (рис. 9):

80	10	60	40	90	20	20	90	40
30	50	70	30	50	70	70	50	30
40	90	20	80	10	60	60	10	80

а)

б)

в)

**Рис. 9**

2. Заповни порожні клітинки квадратів (рис.10) так, щоб сума чисел у кожному рядку, кожному стовпчику і по діагоналях дорівнювала одному і тому самому числу.

30			30				80	
	60		100		20		60	
	40	90	50				40	90

а)

б)

в)

**Рис. 10**

Трое учнів, які першими заповнили клітинки квадратів, заповнюють порожні клітинки квадратів, нарисованих на дошці (рис.11).

30	80	70	30	80	70	30	80	70
100	60	20	100	60	20	100	60	20
50	40	90	50	40	90	50	40	90

а)

б)

в)

**Рис. 11**

Такі вправи, безумовно, зацікавлять учнів, і вони захочуть дізнатися, яка природа цих чисел. Які числа в сумі по рядках, стовпчиках і діагоналях дають один і той самий результат?

Щоб учні самі могли здогадатися, як побудований такий ряд чисел, даємо наступне завдання.

3. Заповни порожні клітинки квадратів (рис. 12) так, щоб сума чисел у кожному рядку, кожному стовпчику і по кожній із діагоналей дорівнювала одному й тому самому числу. Випиши числа з кожного квадрата у порядку зростання. Що можна сказати про послідовність дев'яти чисел, записаних у квадратах?

110		150	130					150	110	160	150
	140			140				100	180	140	100
130			110		150		120	170	130	120	170

а)

б)

в)

г)

**Рис. 12**

Ті учні, які заповнили числами всі три квадрати, виписують із квадрата всі числа у порядку зростання їхньої величини і роблять відповідний висновок: кожне наступне число більше від попереднього на 10 (100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180).

Квадрат, заповнений такими числами, матиме вигляд (рис. 12, г).

4. Заповни порожні клітинки квадратів (рис. 13) так, щоб сума чисел у кожному рядку, стовпчику і по діагоналях становила 255. Знайди суму чисел, розміщених у кожному квадраті.

40		100	70					
	85						85	115
			130		100			40

а)

б)

в)

**Рис. 13**

12	15	27	17	8				
10	14	24	23	6		24	26	
22	29	51				144	130	

а)

б)

в)

	52	61				14		210
	48	57		34	170			
				510	1710	280		1260

г)

г)

д)

Рис. 47

#### 1.4. Спосіб складання магічних квадратів на множення і ділення

*Спосіб складання квадратів з непарною кількістю клітинок.*

Візьмемо найпростішу геометричну прогресію, наприклад: 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256, яка допоможе зрозуміти спосіб складання магічного квадрата із 9 чисел (правило  $2n$ , де  $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Припустимо, що треба скласти магічний квадрат, який має 9 клітинок. Нарисуємо квадрат, в якому 25 клітинок (рис. 48).

На середині крайнього лівого стовпчика квадрата з 25 клітинок пишемо перше число (в даному випадку 1) і по діагоналі вгору розміщуємо числа 2 і 4. Три наступні числа 8, 16, 32 вписуємо по діагоналі, паралельній до першої, щоб число 8 було навпроти числа 1 (тобто, щоб ці числа були розміщені по діагоналі, перпендикулярній до першої). Аналогічно розміщуємо числа 64, 128, 256.

Отже, поза квадратом залишилися числа 1, 4, 64 і 256, які треба помістити в порожні клітинки. Число 64 слід вписати у верхню порожню клітинку, а 4 — у нижню. Так само діють і з числами 1 і 256, що залишилися поза виділеним квадратом у середньому рядку.

В результаті цих дій отримуємо квадрат з 9-ти клітинок, заповнених числами, що обчислюються за правилом  $2n$ , де  $n = 1, 2, 3, \dots$  (рис. 49).

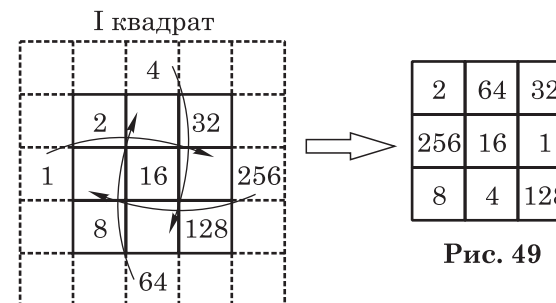


Рис. 48

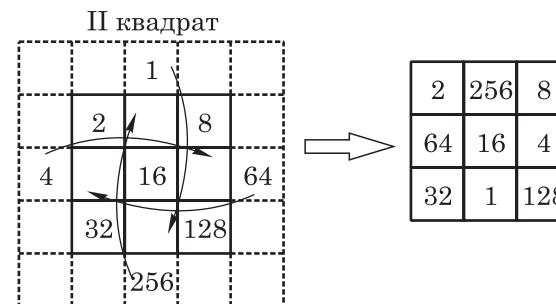


2	64	32
256	16	1
8	4	128

Рис. 49

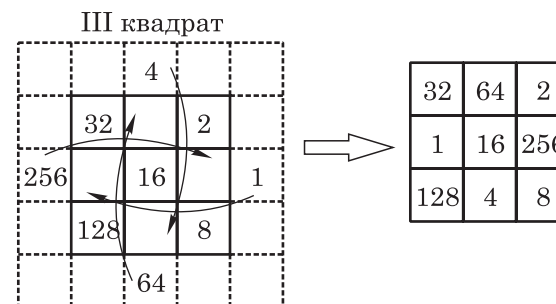
Легко переконалися в тому, що добуток чисел у кожному рядку, стовпчику і по діагоналях дорівнює 4096.

Слід зазначити, що різних магічних квадратів, пов'язаних з діями множення і ділення із числами прогресії 1, 2, 4, ..., 256, можна скласти вісім (рис. 48–50).



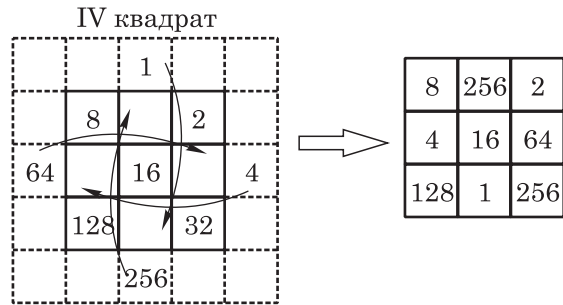
2	256	8
64	16	4
32	1	128

а)

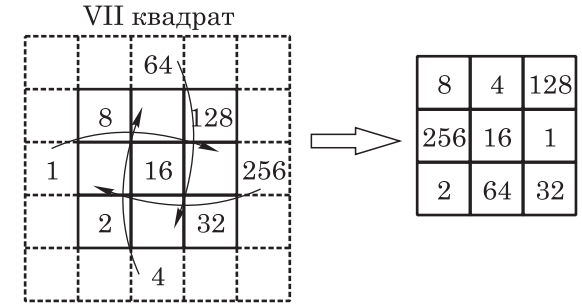


32	64	2
1	16	256
128	4	8

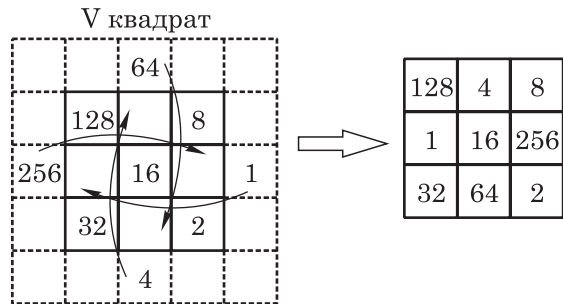
б)



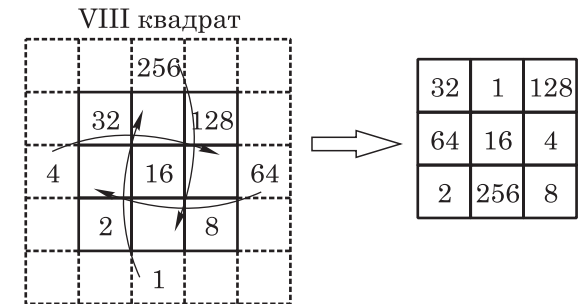
в)



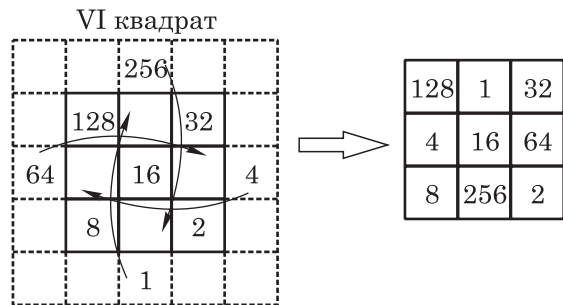
д)



г)



е)



г)

Рис. 50

### 1.5. Множення і ділення натуральних чисел

16. Розглянь квадрат на рис. 51, а), потім заповни клітинки квадратів на рис. 51, б)–г) за тією самою закономірністю (див. рис. 48, 50).

3	6561	27	27		3			27	27		2187
729	81	9		81			81			81	
243	1	2187			243	243		3	3		

а)

б)

в)

г)

Рис. 51

## 5. ВПРАВИ ГЕОМЕТРИЧНОГО ЗМІСТУ

39. Назви фігури, що мають однакові площі (рис. 91, а–е).

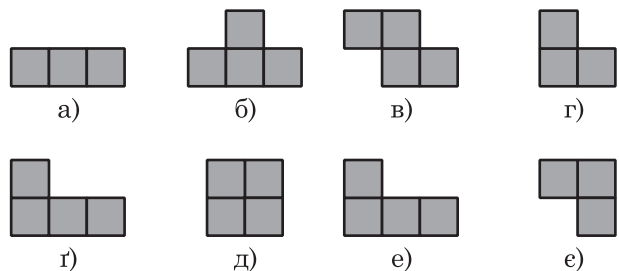


Рис. 91

40. Яка частина круга затушована (рис. 92, а–г)?

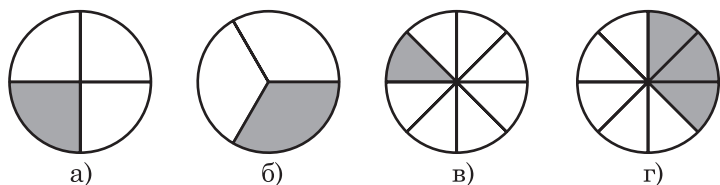


Рис. 92

41. Яка частина квадрата затушована (рис. 93, а–е)?

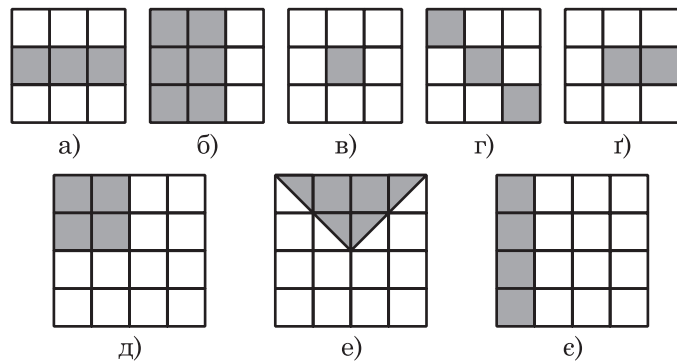


Рис. 93

42. Сторони прямокутника дорівнюють 2 см і 4 см. Визнач площу затушованої частини кожного прямокутника (рис. 94, а–в).

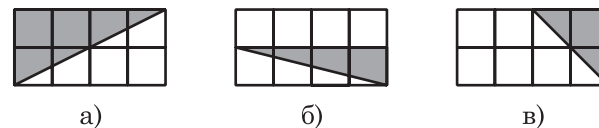


Рис. 94

43. Квадрат зі стороною 2 см розріж на частини (рис. 95, а). Склади з них фігури, показані на рис. 95, б), в), г). Знайди площу кожної фігури.

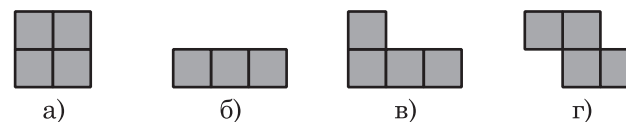


Рис. 95

44. Покажи, як треба розрізати кожен з фігур (рис. 96, а–е) на 2 частини, щоб скласти з них квадрат.

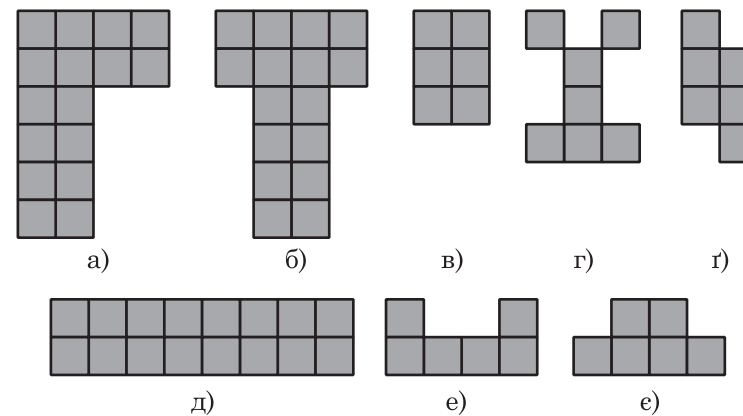


Рис. 96

45. Якими можуть бути сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює: а) 8 см; б) 10 см; в) 12 см; г) 16 см?

46. З дроту виготовили квадрат зі стороною 15 см. Як можна з такого самого відрізка дроту виготовити прямокутник зі сторонами: а) 20 см і 10 см; б) 16 см і 14 см; в) 25 см і 5 см; г) 12 см і 18 см?



47. Скільки можна накреслити квадратів з периметром 24 см; прямокутників з периметром 24 см?

48. Накресли прямокутник зі сторонами 4 см і 2 см. Середини його протилежних сторін сполучи відрізками. Скільки прямокутників можна назвати? Запиши довжини сторін найменшого прямокутника.

49. Сполучи протилежні вершини квадрата відрізками. Скільки рівних трикутників при цьому утвориться?

50. Визнач площу кожної фігури (рис. 97, а–г).

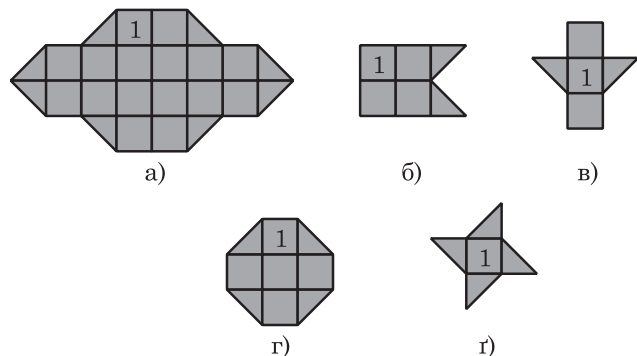


Рис. 97

51. Чи існує серед прямокутників із площею  $72 \text{ см}^2$  такий, який можна поділити на 2 рівних квадрати? Накресли цей квадрат.

52. Якими можуть бути сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 36 см?

53. Накресли квадрат зі стороною 6 см і прямокутник зі сторонами 10 см і 2 см. Порівняй їхні периметри і площі.

54. Площа квадрата дорівнює  $16 \text{ см}^2$ . Накресли прямокутники, які мають таку саму площу. Порівняй їхні периметри і площі.

55. Знайди площу кожної затушованої фігури (рис. 98, а–в). Порівняй їхні периметри і площі.

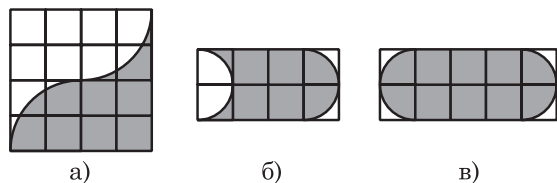


Рис. 98

56. Як зміниться площа прямокутника, якщо його довжину і ширину збільшити у три рази?

57. Накресли квадрат зі стороною 1 дм. Розріж його на квадратні сантиметри. Якої довжини можна скласти прямокутник, ширина якого 1 см?

58. Установивши залежність між  $a$  і  $b$ , заповни таблицю:

$a$	4	2	3	7			15	
$b$	32	16			40	48		80

59. Склади з частин квадрата (рис. 99, а) фігури, зображені на рис. 99, б)–г). Знайди площу кожної зображеної фігури.

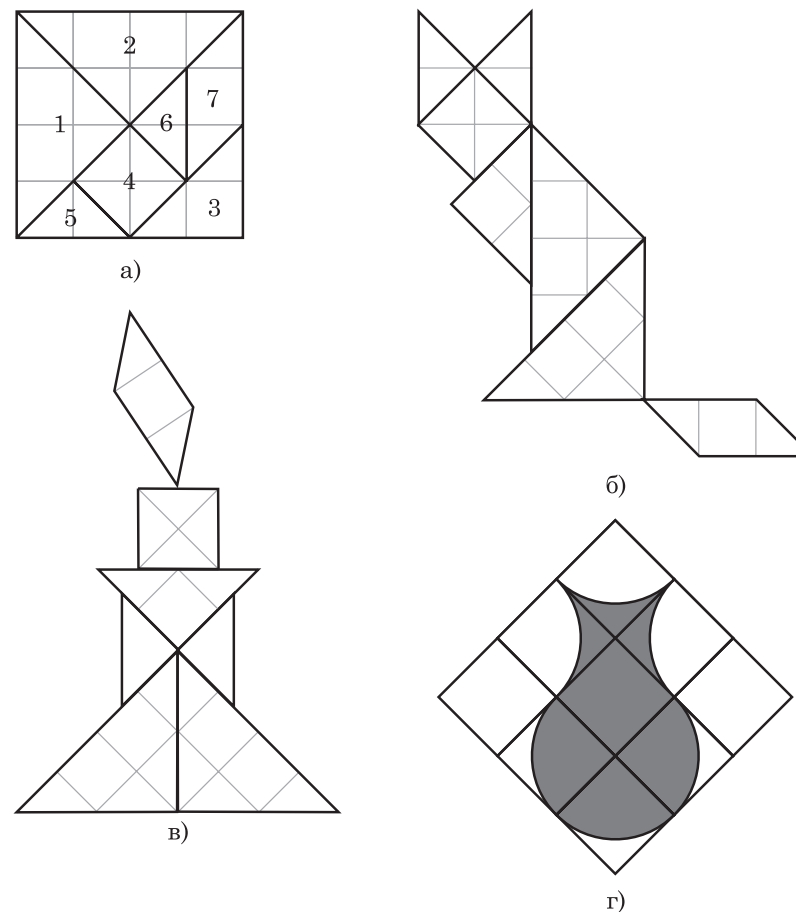


Рис. 99

## 11. ГАЛЕРЕЯ ЧИСЛОВИХ НЕСПОДІВАНОК

$$\begin{aligned}1 \cdot 9 + 2 &= 11 \\12 \cdot 9 + 3 &= 111 \\123 \cdot 9 + 4 &= 11111 \\1234 \cdot 9 + 5 &= 111111 \\12345 \cdot 9 + 6 &= 1111111 \\123456 \cdot 9 + 7 &= 11111111 \\1234567 \cdot 9 + 8 &= 111111111 \\12345678 \cdot 9 + 9 &= 1111111111\end{aligned}$$

Рис. 158. Перша числова піраміда

$$\begin{aligned}1 \cdot 8 + 1 &= 9 \\12 \cdot 8 + 2 &= 98 \\123 \cdot 8 + 3 &= 987 \\1234 \cdot 8 + 4 &= 9876 \\12345 \cdot 8 + 5 &= 98765 \\123456 \cdot 8 + 6 &= 987654 \\1234567 \cdot 8 + 7 &= 9876543 \\12345678 \cdot 8 + 8 &= 98765432 \\123456789 \cdot 8 + 9 &= 987654321\end{aligned}$$

Рис. 159. Друга числова піраміда

$$\begin{aligned}9 \cdot 9 + 7 &= 88 \\98 \cdot 9 + 6 &= 888 \\987 \cdot 9 + 5 &= 8888 \\9876 \cdot 9 + 4 &= 88888 \\98765 \cdot 9 + 3 &= 888888 \\987654 \cdot 9 + 2 &= 8888888 \\9876543 \cdot 9 + 1 &= 88888888 \\98765432 \cdot 9 + 0 &= 888888888\end{aligned}$$

Рис. 160. Третя числова піраміда

## ЗМІСТ

Передмова .....	3
Вступ. Фігурні числа.....	4
<b>1. Магічні квадрати.....</b>	<b>7</b>
1.1. Методика розв'язування магічних квадратів .....	7
1.2. Методика складання магічних квадратів .....	11
1.3. Додавання і віднімання натуральних чисел.....	20
1.4. Спосіб складання магічних квадратів на множення і ділення.....	24
1.5. Множення і ділення натуральних чисел .....	27
<b>2. Цікаві трикутники.....</b>	<b>29</b>
2.1. Методика складання цікавих трикутників.....	29
2.2. Додавання і віднімання натуральних чисел.....	33
2.3. Множення і ділення багатоцифрових чисел.....	35
<b>3. Ігри в доміно.....</b>	<b>38</b>
3.1. Множення в доміно .....	38
3.2. Гра «Цікаві прямокутники».....	39
<b>4. Рівняння думає за нас .....</b>	<b>42</b>
<b>5. Вправи геометричного змісту .....</b>	<b>44</b>
<b>6. Звичайні дроби з однаковими знаменниками .....</b>	<b>48</b>
6.1. Магічні квадрати.....	48
6.2. Цікаві трикутники.....	54
<b>7. Десяткові дроби.....</b>	<b>55</b>
7.1. Магічні квадрати при додаванні та відніманні .....	55
7.2. Цікаві трикутники при додаванні та відніманні .....	58
7.3. Магічні квадрати при множенні та діленні .....	61
7.4. Середнє арифметичне.....	63
<b>8. Звичайні дроби .....</b>	<b>64</b>
8.1. Додавання і віднімання звичайних дробів .....	64
8.2. Множення і ділення звичайних дробів .....	67
8.3. Пряма пропорційна залежність .....	68
<b>9. Раціональні числа .....</b>	<b>69</b>
9.1. Додавання та віднімання раціональних чисел.....	69
9.2. Множення і ділення раціональних чисел.....	72
<b>10. Рівняння .....</b>	<b>74</b>
<b>11. Галерея числових несподіванок .....</b>	<b>78</b>



*Навчальне видання*

ВОЗНЯК Григорій Михайлович  
ВОЗНЯК Ольга Григорівна

## **МАГІЧНІ ФІГУРИ ТА ЧИСЛА**

### **5–6 КЛАСИ**

Головний редактор *Богдан Будний*  
Редактор *Володимир Дячун*  
Художник обкладинки *Володимир Басалига*  
Дизайн та комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 1.06.2011. Формат 60×84/16. Папір офсетний.  
Гарнітура Century SchoolBook. Умовн. друк. арк. 4,65. Умовн. фарбо-відб. 4,65.

Видавництво "Навчальна книга – Богдан"  
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців  
ДК №370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга – Богдан, а/с 529, м.Тернопіль, 46008  
тел./факс (0352) 52-06-07; 52-05-48; 52-19-66; (067) 350-18-70  
*publishing@budny.te.ua, office@bohdan-books.com*  
[www.bohdan-books.com](http://www.bohdan-books.com)

ISBN 978-966-10-1384-0

