

КЛАСИКИ ПОПУЛЯРИЗАЦІЇ НАУКИ
Математичні заманинки

Б.А. Кордемський

Маленькі таємниці чисел та фігур

Книга шоста



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

ББК 22.1я72
К66

Загальну серію “Класики популяризації науки” засновано у 2007 році

Кордемський Б.А.

К66 Маленькі таємниці чисел та фігур. Книга шоста: Пер. з рос. / Заг. ред. В.К. Дячуна. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2009. — 72 с; іл. (Класики популяризації науки; Математичні заманинки).

ISBN 978-966-10-0693-4

Шоста книга із серії «Математичні заманинки» майстра науково-популярної літератури Бориса Анастасійовича Кордемського — збірник математичних мініатюр: різноманітних цікавих есеїв та досліджень і просто задач, що увібрали в себе «жар холодних чисел» і красу геометричних абстракцій.

Усі, хто захоплюється математикою, — незалежно від віку — матимуть можливість потренувати мислення, кмітливість та винахідливість.

ББК 22.1я72

Охороняється законом про авторське право.

Жодна частина цього видання не може бути відтворена в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва

ISBN 978-966-408-435-9 (серія)
ISBN 978-966-10-0693-4

© Луковцева А.К., Фохт О.Б., спадкоємці, 2005
© Кравчук А.В., Дячун В.К., переклад, 2009
© Дячун В.К., передмова, примітки, загальна редакція, 2009
© Навчальна книга – Богдан, макет, художнє оформлення, 2009

Зміст

Передмова до українського видання	5
Передмова до російського видання	7
«... Приховувати я не стану...»	8
Любов з першого погляду	10
Кубик зі смужки.....	11
Кубик виготовлено	12
Велетень та пігмей	12
Перетворення трикутника у прямокутник	13
Усе можуть ... 10 цифр	13
Обійдемося без нуля.....	15
Дві веселі теореми	17
Головоломка на тему перебудови	18
Розшуковуються числа, що загубилися	18
Воно росте, залишаючись квадратним	19
Невже?	19
Сім бід — один одвіт.....	20
Задача розмітника	22
Циркуль у жарті й у справі	23
Курйозні дрібниці.....	23
Три сестри, килим і лист	27
Зачароване число 128	28
Зачарованість зникає.....	29
Унікальна трійка integers	29
Фокус геометрії руху	30

«Незакінчена симфонія» числових залежностей (у 10 частинах).....	31
Народження «античного красеня»	32
Розгортки моделей багатогранників.....	33
Таємниця розгортки октаедра	33
Геометрична головоломка	34
«Піраміда Піфагора»	35
I у чисел бувають дивацтва	35
«Потворну» піраміду — із частин квадрата.....	37
Інтерв'ю астронавта.....	38
Оповідь без прикрас про перетворення скельця в алмаз.....	39
Арифметика — точильний камінь здібностей	40
Кубик не Рубика	41
Як прагматик, чи як математик?	41
Листок Мебіуса та переплетення кілець (тринадцять дослідів з паперовою смужкою)	42
Розв'язки	47

Передмова до українського видання

Це видання — переклад книги «Математические завлекалки» Б.А. Кордемського (1907–1999 рр.), метра російської науково-популярної літератури, книги, яка, на жаль, виявилася останньою в його значному творчому доробку. А це — ціла низка різноманітних і захоплюючих книг, які, пробуджуючи цікавість до математики, сприяли вихованню математичного мислення, розвитку ініціативи та кмітливості у багатьох поколінь учнів.

У праці, в навчанні, у грі, у будь-якій творчій діяльності людині потрібні, за словами Кордемського, винахідливість, спритність, здогад, уміння міркувати, — усе те, що можна означити одним словом як кмітливість, або ж, рівноцінним, соковитим, — тямущість. Її ж, цю тямущість, можна виховати й розвинути систематичними і поступовими вправами, зокрема, розв'язуванням математичних задач як шкільного курсу, так і задач, що виникають з практики, пов'язаних із спостереженням довколишнього світу речей та явищ, — особливо ж розв'язуванням математичних головоломок, ребусів, задач з інтригуючим змістом. Можливо, в наш прагматичний час елементи «інтриги», «приваби», врешті, «заманювання» відіграють чи не найвирішальнішу роль.

Тепер ось маємо й україномовну версію математичних «заманинок» (до речі, теж своєрідний український «новотвір» — адже слово сконструйоване на основі «заманливого», тобто чогось привабливого, приємного тощо — тут і відлуння діалектної «заманки» — «принади»). У вітчизняному інформаційному просторі оприсутнюються персонажі книги: Жвавчик (в оригіналі «Шустрик») та Мимрик («Мямлік»). Перший — меткий, заповзятливий, спритний. І: розсудливий, дещо стриманий, — другий. В математиці обидва типи особистостей і, отже, підходів потрібні в однаковій мірі — бо, як правило, початкове емоційне сприйняття умови задачі (чи її «інтриги») повинно, вре-

шти, урівноважитись вдумливим, спокійним аналізом усіх можливих розгалужень та варіантів розв'язання цієї задачі.

Дві стихії (знову ж таки, за висловом Кордемського) панують в царині математики — числа й фігури з їхнім нескінченним різноманіттям властивостей і взаємозв'язків. Задача — це майже завжди пошук, розкриття цих властивостей і співвідношень, а засоби її розв'язку — це інтуїція та здогад, ерудиція й володіння методами математики. Стихія чисел і фігур, притаманна математиці, панує, отже, на кожній сторінці кожної із книг цієї серії — починаючи від «усілякої всячини», проходячи через «галерею казок і фантазій», переживаючи «події та пригоди на стежинках математики», розкриваючи «маленькі таємниці чисел та фігур» і, врешті, «роблячи відкриття».

Особливої уваги заслуговує так звана «поетикоарифметика», розсипана по усьому тексті — це і вірші, поетичні уривки, епіграфи, заголовки тощо. На перший погляд, цей «калейдоскоп» може видатись строгому математику зайвим чи надто «переобтяженим поезією» — проте, заглибившись у цей поетичний світ чисел та фігур, мимоволі зачаровуєшся магією цієї стихії. Звичайно ж, адекватність перекладу вимагала досить доскіпливого підходу до поетичних текстів, написаних в різні епохи людської історії та й у досить відмінних стилях. Інколи це вимагало до «примітивного» версіфікування знаходити такі ж адекватні «примітивності» або ж на уже зроблений переклад з інших мов російською в оригіналі «накладати» український переклад.

Загалом, певні удосконалення розв'язків задач (і це відображено у відповідних примітках), усунення деяких помилок та неточностей, а також проведена стилістична правка тексту, на нашу думку, тільки розширить коло зацікавлених українських читачів цієї захоплюючої книги «заманинок».

В.К. Дячун

Передмова до російського видання

Лише забавляючись і вчимося.

Анатоль Франс

Пропоновані тут математичні мініатюри — цікаві есеї й казочки, фантазії та просто задачі, легкі й важкі, але завжди загальнодоступні, такі, що тренують і шліфують власне мислення, — об'єднані загальною назвою “заманинки”. Звідси й мета книги — улюбити вас, читачів, у найдавнішу, проте вічноквітучу науку — математику, світ якої, не менше, ніж світ живої та неживої природи, повен нерозгаданих і розгаданих таємниць, дивовижних і драматичних явищ, захоплюючих подій та вражаючих відкриттів.

Творча активність, спритність, винахідливість та кмітливість досягають найвищої напруги та отримують зразкове тренування, коли думка захоплена прагненням розв'язати задачу, котра зацікавила. Знайдений розв'язок або навіть читання викладеного дотепного розв'язку завжди викликають розумове задоволення, естетичну насолоду.

Легкий гумор фабули, несподіваність ситуації чи розв'язки, спричинюваних розв'язанням задачі, стрункість геометричних форм, вишуканість розв'язку, під яким розуміють поєднання простоти й оригінальності методів його одержання — ось основні елементи естетики цікавих задач “на кмітливість”, і такі от збудники сил притягання уваги думуючої людини.

Пропонована книга “заманинок” безпосередньо не вчить математиці, але в години вашого активного відпочинку зможете поблукати стежинками математики, піднятися по сходинках пізнання від нижчої: досвіду, споглядання, накопичення спостережень — до подальшої: розуміння теоретичних основ споглядуваного матеріалу, висновків зі спостережень. Бажаю успіху!

Б.А. Кордемський

*Математика народжувалася одночасно
з арифметики й геометрії.*

О.Д. Александров

(Але...)

*Хвилювання — то властивість весни,
Бо завжди ми непокоїмось в ній,
То ж не будемо пихато-смішні,
Що задачі всі розв'язані — ні...**

Л. Мартинов

Їх нескінченно багато — цих числових і геометричних відношень, які не впадають в око й, однак, достатньою мірою увібрали в себе і «жар холодних чисел», і красу геометричних абстракцій. Допитливий погляд «натураліста»-математика, звичайно, помічає їх.

«... Приховувати я не стану...»

1. Що таємниця чисел 12 і — оберненого — 21 розкрита: квадрати цих чисел — 144 і 441 — також взаємно обернені числа. Чи не підберете ще хоча б одну пару чисел з такою ж властивістю?

2. Що, якщо квадратне число (n^2) закінчується на 25, наприклад, 625, то його третя цифра від кінця — неодмінно парна, але не 4 і не 8. Все-таки треба б це довести, зрозуміло, не прикладами.

3. Що фігурки двох ребусів

* Віршовані тексти перекладені В.К. Дячуном.

$$(\bigcirc \square)^{\bigcirc} = \triangle \parallel \square \square \square$$

$$(\triangle \triangle)^{\square} = \triangle \square \square \triangle$$

— мовби запитують вас:

а) який степінь двозначного числа має «хвостик» із трьох однакових цифр (перший ребус)?

б) Який степінь двозначного числа з однаковими цифрами є паліндромічним числом, тобто числом, рівним оберненому (другий ребус)?

4. Що «немає правила без винятків» іноді не тільки у людей, але й на множині цілих чисел і геометричних фігур.

Спробуйте, приміром, препарувати ціле число для подання у вигляді різниці квадратів — відразу виявиться й «правило», і «виняток»:

$$1 = 1^2 - 0^2$$

$$5 = 3^2 - 2^2$$

$$9 = 5^2 - 4^2$$

2

6

10

$$3 = 2^2 - 1^2$$

$$7 = 4^2 - 3^2$$

$$11 = 6^2 - 5^2$$

$$4 = 2^2 - 0^2$$

$$8 = 3^2 - 1^2$$

$$12 = 4^2 - 2^2$$

.....

Трохи пильної уваги — і виникає гіпотеза: будь-яке $n \in \mathbb{N}$, за винятком парних чисел виду $2(2n - 1)$, можна подати у вигляді різниці квадратів двох натуральних чисел.

Те, що $2(2n - 1) \neq x^2 - y^2$, $x, y \in \mathbb{N}$, легко доводиться «від супротивного». Нехай $2(2n - 1) = 2km$, де k і m — непарні. Припустимо, що $2km = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

Тоді

$$\begin{cases} x - y = 2k, \\ x + y = m, \end{cases} \Rightarrow x = k + \frac{m}{2} \Rightarrow m \text{ — парне. Протиріччя!}$$

Для всіх інших натуральних чисел, тобто парних виду $4n$ і всіх непарних, справедливі тотожності:

$$4n = (n + 1)^2 - (n - 1)^2 \text{ та } 2n - 1 = n^2 - (n - 1)^2.$$

Переконайтеся! Дещо таємне стало явним! Проте, читаючи кумедний афоризм Байрона:

«наука — це обмін одних незнань на інші»,

продовжимо спостереження за різницею квадратів натуральних чисел:

$$\begin{array}{lll} 2^2 - 0^2 = 2 \cdot 2 & 4^2 - 1^2 = 3 \cdot 5 & 7^2 - 4^2 = 3 \cdot 11 \\ 3^2 - 0^2 = 3 \cdot 3 & 5^2 - 2^2 = 3 \cdot 7 & 8^2 - 3^2 = 5 \cdot 11 \\ & 6^2 - 1^2 = 5 \cdot 7 & 9^2 - 2^2 = 7 \cdot 11 \end{array}$$

.....

Зауважуємо: у правій частині рівності обидва співмножники — прості числа. Так пробилось джерельце ще однієї «аматорської» гіпотези:

для будь-якого натурального $x > 1$ можна підібрати натуральне y , таке, що $x^2 - y^2 = p_1 \cdot p_2$, де p_1, p_2 — прості числа.

Ще момент — і новою гранню повернеться ця гіпотеза. Нехай $x - y = p_1$ і $x + y = p_2$. Тоді $x = \frac{p_1 + p_2}{2}$, тобто

можливо, що будь-яке число $x > 1$, взяте на осі натуральних чисел, є центром симетрії хоча б однієї пари простих чисел.

Любов з першого погляду

В математиці це — моментальне прийняття правильного висновку при одному погляді на дану задачу.

Таке можливе, зрозуміло, як реалізація попередньо набутого багатства відомостей про числа й фігури.

Випробуйте себе на «любов з першого погляду» до запропонованих далі задач: намагайтеся дати миттєві відповіді з наступним обґрунтуванням їхньої правильності.

1. Яке із чисел 1992, 40835, 6887, 5348, 783 є точним квадратом?
2. Яку цифру потрібно дописати зліва до числа 425 і до числа 845, щоб утворилися точні квадрати?
3. Не обчислюючи площ трикутників, сторони яких 5, 5, 6 і 5, 5, 8, визначте з першого погляду — чи рівновеликі вони, тобто чи рівні їхні площі.

Кубик зі смужки

З аркуша паперу (одна сторона — біла, інша — кольорова) виріжте прямокутну смужку, довжина якої у 8 разів більша від ширини. Поділіть смужку пунктирними лініями на 8 рівних квадратів і перегніть її по діагоналі п'ятого квадрата (див. мал. справа).

Далі, зберігаючи зроблений згин, робіть нові згини смужки по пунктирних лініях під прямим кутом і зімкніть усі квадрати, утворюючи форму кубика з ребром, що дорівнює ширині смужки. Усі 6 граней кубика зовні повинні бути кольоровими. У сформованого кубика перший і восьмий квадратики підклейте (клеюкою стрічкою) — кубик не розвалиться.

Молодшим повинна сподобатися ця розвага.

